В. В. Шлыков

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

3-е издание, исправленное

Минск «Народная асвета» 2012

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Ш69

Рецензенты:
кафедра алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова» (кандидат педагогических наук, профессор *Е. Е. Семенов*); учитель математики высшей категории государственного учреждения образования «Средняя общеобразовательная школа № 153 г. Минска» *А. И. Абрамович*

ISBN 978-985-03-1721-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

Вписанные и описанные многоугольники

Глава 2

Соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника

Глава 3

Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга

Глава 4

Задачи для повторения

Уважаемые друзья!

Изложенный в данном учебном пособии материал относится к заключительной части курса геометрии, который традиционно называется планиметрией. В первой главе рассматриваются свойства вписанных и описанных углов. Ранее уже было рассмотрено понятие окружности и касательной к ней. Теперь эти понятия изучаются более детально, доказываются свойство и признак касательной к окружности, рассматривается вопрос о построении касательной к окружности с помощью циркуля и линейки. Здесь же изучаются свойства центральных и вписанных углов, доказываются теоремы о градусной мере вписанного угла, о свойстве отрезков пересекающихся хорд окружности, а также о свойстве отрезков секущей и касательной. Кроме того, в первой главе доказываются теоремы о точках пересечения биссектрис и высот треугольника. Далее излагаются свойства вписанных и описанных треугольников и четырехугольников.

Во второй главе рассматриваются вопросы о соотношении между сторонами и углами произвольного треугольника, доказываются теоремы синусов и косинусов. Здесь на уровне задач рассматривается вопрос о нахождении элементов треугольника с помощью теоремы синусов и косинусов.

В третьей главе излагаются вопросы о правильных многоугольниках, доказываются теоремы о вписанной и описанной окружностях, выводятся формулы для нахождения элементов правильного многоугольника через радиус вписанной или описанной окружностей. Далее рассматриваются понятие длины окружности, формулы длины окружности и ее дуги, площади круга, сектора и сегмента. В конце главы приведены задачи для повторения.

Система задач в учебном пособии обеспечивает организацию систематического повторения учебного материала. Рассматриваются задачи, способствующие развитию пространственных представлений, а предложенная в учебном пособии система графических моделей направлена на формирование графической культуры учащихся.

1

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Глава 1
ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 1. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности

1. Взаимное расположение прямой и окружности. Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямой и окружности. Ранее уже отмечалось, что возможны три случая взаимного расположения прямой и окружности:

1) прямая имеет только две общие точки с окружностью;

2) прямая имеет только одну общую точку с окружностью;

3) прямая не имеет общих точек с окружностью.

Если прямая имеет две общие точки с окружностью, то она называется *секущей*.

Взаимное расположение окружности $\omega(O, R)$ с центром в точке O радиуса R и прямой l характеризуется соотношением между расстоянием $d(O, l)$ от центра O окружности до прямой l и радиусом R окружности. Докажем это.

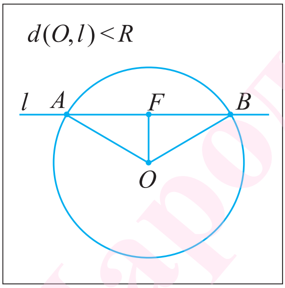


Рис. 1

1) *Прямая l имеет только две общие точки с окружностью, если расстояние от центра окружности до прямой l меньше радиуса окружности*, т. е. если $d(O, l) < R$ (рис. 1).

Пусть прямая l не проходит через центр O окружности и расстояние $d(O, l) = m$, $m < R$. Обозначим OF ($F \in l$) — перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой l, тогда $OF = m$. Пусть точки A и B лежат на прямой l так, что $FA = FB = \sqrt{R^2 - m^2}$. Докажем, что точки A и B принадлежат окружности.

Действительно, так как по теореме Пифагора $OA = \sqrt{OF^2 + FA^2} = \sqrt{m^2 + (R^2 - m^2)} = R$ и $OB = \sqrt{OF^2 + FB^2} = \sqrt{m^2 + (R^2 - m^2)} = R$, то $OA = OB = R$. Таким образом, точки A и B — общие точки прямой и окружности. Докажем, что других общих точек прямая l и окружность $\omega(O, R)$ не имеют.

Предположим, что существует еще одна точка X — общая для окружности и прямой. Тогда центр окружности O равноудален от точек A, B, и X, а значит, он лежит на серединных перпендикулярах l_1 и l_2 к отрезкам AB и BX, т. е. O — точка перессечения серединных перпендикуляров l_1 и l_2. Но так как $l_1 \perp l$ и $l_2 \perp l$, то $l_1 \parallel l_2$. Получили противоречие. Значит, наше предположение не верно и других общих точек прямой и окружности нет.

Если прямая l проходит через центр O окружности, т. е. $d(O,\ l) = 0$, то она пересекает окружность в двух точках, которые являются концами диаметра, лежащего на этой прямой.

2) *Прямая l имеет только одну общую точку с окружностью, если расстояние от центра окружности до прямой l равно радиусу окружности, т. е. если $d(O,\ l) = R$.*

Пусть расстояние от центра окружности до прямой l равно радиусу окружности, а точка F — основание перпендикуляра, проведенного из центра окружности к прямой l (рис. 2). Тогда $OF = R$, а значит, точка F лежит на окружности. Других общих точек прямая и окружность не имеют. Действительно, для любой точки X прямой l, не совпадающей с точкой F, выполняется условие $OX > OF$, $OF = R$, так как наклонная OX больше перпендикуляра OF. Следовательно, точка X не лежит на окружности.

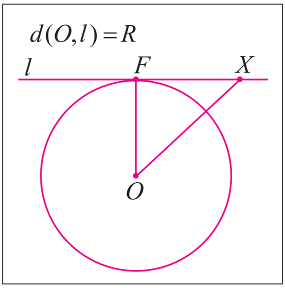


Рис. 2

3) *Прямая l не имеет общих точек с окружностью, если расстояние от центра O окружности до прямой l больше радиуса окружности, т. е. если $d(O,\ l) > R$.*

Пусть расстояние от центра O окружности до прямой l больше радиуса R. Обозначим буквой F основание перпендикуляра, проведенного из центра O окружности к прямой l (рис. 3). Тогда $OF = d(O,\ l)$, $d(O,\ l) > R$.

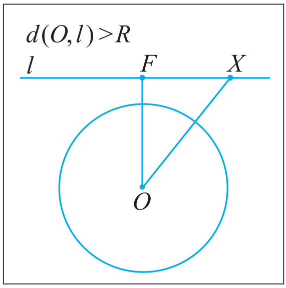


Рис. 3

Для любой точки X прямой выполняется условие $OX \geqslant OF > R$, следовательно, точка X не лежит на окружности. Таким образом, в случае $d(O, l) > R$ прямая и окружность не имеют общих точек.

2. Касательная к окружности. Рассмотрим случай, когда прямая и окружность имеют единственную общую точку. Прямая, имеющая единственную общую точку с окружностью, имеет специальное название — *касательная*.

Определение. **Касательной к окружности называется прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку.**

Единственная общая точка прямой и окружности называется *точкой касания* прямой и окружности.

Если прямая l имеет единственную общую точку A с окружностью, то говорят, что прямая l касается окружности в точке A.

Теорема 1 (*о свойстве касательной*). ***Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.***

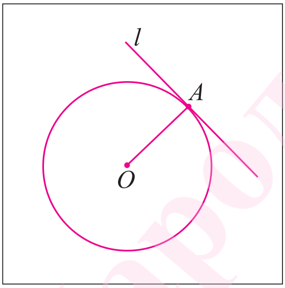


Рис. 4

Доказательство.

1) Пусть прямая l касается окружности $\omega(O, R)$ в точке A (рис. 4). Докажем, что $l \perp OA$.

2) Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к прямой l. Перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой l, меньше наклонной OA, следовательно, расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса. Значит, прямая и окружность имеют две общие точки, что противоречит условию. Таким образом, прямая l перпендикулярна радиусу OA.

Теорема доказана.

Рассмотрим следствия из данной теоремы.

Пусть через точку A проведены две прямые, касающиеся окружности $\omega(O, R)$ в точках C и B. Тогда отрезки AB и AC называются *отрезками касательных*, проведенными из точки A (рис. 5).

Следствие 1. ***Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.***

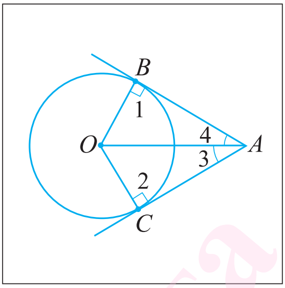


Рис. 5

Доказательство.

1) Пусть AB и AC — отрезки касательных, проведенные из точки A (рис. 5). Для доказательства равенства $AB = AC$ рассмотрим треугольники ABO и ACO.

2) По свойству касательной $\angle 1 = 90°$ и $\angle 2 = 90°$, т. е. треугольники ABO и ACO — прямоугольные.

3) $\triangle ABO = \triangle ACO$, так как AO — общая гипотенуза, а катеты OB и OC равны как радиусы окружности. Отсюда следует, что $AB = AC$.

Следствие **1** доказано.

Из равенства треугольников ABO и ACO вытекает также, что $\angle 3 = \angle 4$. Таким образом, получим еще одно следствие.

Следствие 2. ***Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.***

Теперь докажем признак, который позволяет устанавливать, в каком случае прямая касается окружности. Оказывается, для этого достаточно установить, что прямая перпендикулярна радиусу и проходит через его конец, лежащий на окружности.

Теорема 2 (*признак касательной*). ***Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через его конец, лежащий на окружности, то она касается этой окружности.***

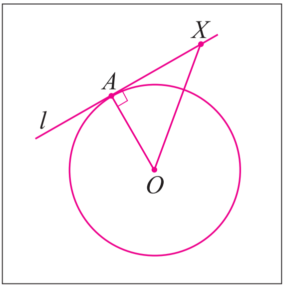


Рис. 6

Доказательство.

1) Пусть прямая l проходит через точку A окружности и перпендикулярна радиусу OA (рис. 6). Для доказательства того, что прямая l касается окружности, достаточно доказать, что она имеет с этой окружностью единственную общую точку.

2) Так как точка A лежит на окружности и прямая l проходит через точку A, то A — общая точка прямой l и окружности.

3) Других общих точек прямая l и окружность не имеют. Действительно, для любой точки $X \in l$ отрезок OX является наклонной, так как по условию $OA \perp l$. Следовательно, $OX > OA$, т. е. точка X не принадлежит окружности.

Таким образом, точка A — единственная общая точка прямой l и окружности, а, значит, прямая l — касательная к окружности.

Теорема доказана.

Задача 1. Через точку A, находящуюся от центра O окружности на расстоянии 10 см, проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Вычислите площадь S_{ABOC} четырехугольника $ABOC$, если $AB + AC = 16$ см (рис. 7).

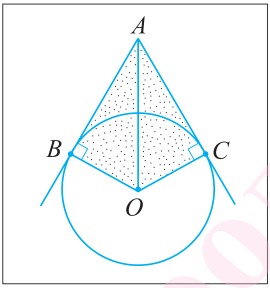


Рис. 7

Решение.

1) Площадь четырехугольника $ABOC$ равна сумме площадей треугольников ABO и ACO.

2) По свойству касательной $\angle OBA = \angle OCA = 90°$. Прямоугольные треугольники ABO и ACO равны по гипотенузе и катету (AO — общая, $OB = OC$). Значит,

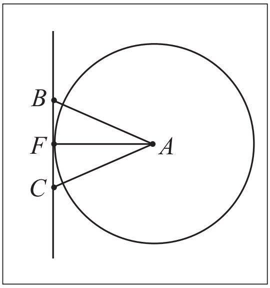
$$S_{ABOC} = 2S_{ABO} = 2 \cdot \frac{1}{2} OB \cdot AB = OB \cdot AB.$$

3) Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны. Следовательно, $AB = AC = 8$ см. Теперь, применив теорему Пифагора, вычислим $OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

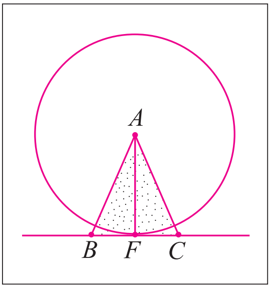
Таким образом, $S_{ABOC} = OB \cdot AB = 6 \cdot 8 = 48$ (см^2).

Ответ: $S_{ABOC} = 48$ см^2.

Задача 2. Точка F — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что прямая BC является касательной к окружности $\omega(A, AF)$ (рис. 8, *а*, *б*).



а)



б)

Рис. 8

Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC$, $F \in BC$, $BF = FC$, $\omega(A,\ AF)$.
Доказать: BC — касательная.

Доказательство.

1) Прямая BC проходит через конец F радиуса окружности $\omega(A,\ AF)$. Для доказательства того, что BC является касательной, достаточно доказать, что $BC \perp AF$.

2) В равнобедренном треугольнике ABC отрезок AF — медиана, проведенная к его основанию. Следовательно, $AF \perp BC$. Таким образом, по признаку касательной прямая BC касается окружности $\omega(A,\ AF)$.

Что и требовалось доказать.

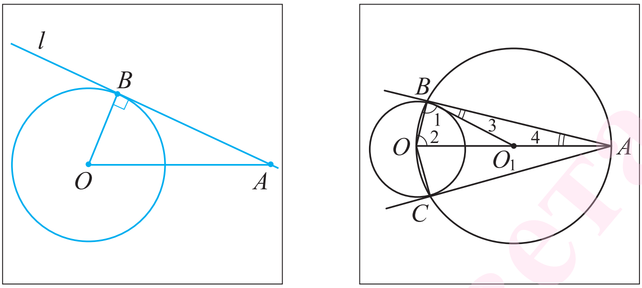
Задача 3. Точка A лежит вне окружности $\omega(O,\ R)$. Постройте прямую, которая касается окружности и проходит через точку A.

Поиск решения.

1) Пусть прямая l, проходящая через точку A и касающаяся окружности $\omega(O,\ R)$, построена. Точка B — точка касания. Тогда по свойству касательной $OB \perp AB$ (рис. 9, *а*). Следовательно, для построения искомой касательной необходимо построить точку B на окружности $\omega(O,\ R)$ так, что $OB \perp AB$.

2) Рассмотрим окружность ω_1, диаметром которой является отрезок AO, т. е. $\omega_1(O_1,\ O_1A)$, где $O_1 \in OA$ и $OO_1 = O_1A$. Пусть B и C — точки пересечения окружностей $\omega(O,\ R)$ и $\omega_1(O_1,\ O_1A)$ (рис. 9, *б*). Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, как углы при основании равнобедренных треугольников BO_1O и BO_1A соответственно. Так как $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, то $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 90°$. Значит, $\angle OBA = 90°$, т. е. $OB \perp AB$. Аналогично доказывается, что $OC \perp AC$. Отсюда по признаку

касательной к окружности следует, что прямые AB и AC являются касательными. Теперь понятна последовательность необходимых построений.



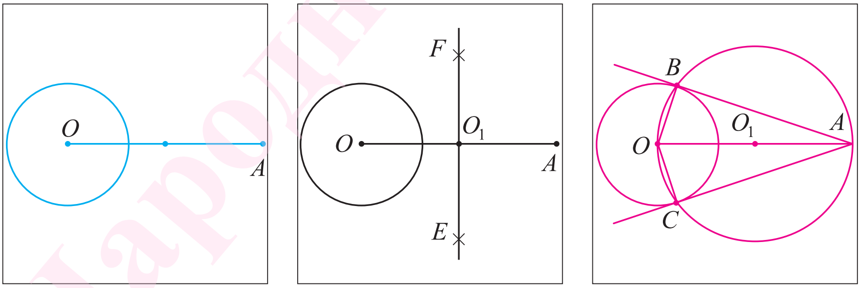
а) б)

Рис. 9

Построение.

1) Проводим отрезок OA, соединяющий центр O данной окружности и точку A (рис. 10, *а*).

2) Строим середину O_1 отрезка OA: $O_1 = FE \cap OA$. Точки F и E — точки пересечения окружностей $\omega_2(O, r)$ и $\omega_3(A, r)$, где $r > \frac{1}{2}OA$ (рис. 10, *б*).



а) б) в)

Рис. 10

3) Строим окружность $\omega_1(O_1, O_1A)$ (рис. 10, *в*) и точки B, C — точки пересечения данной и построенной окружностей.

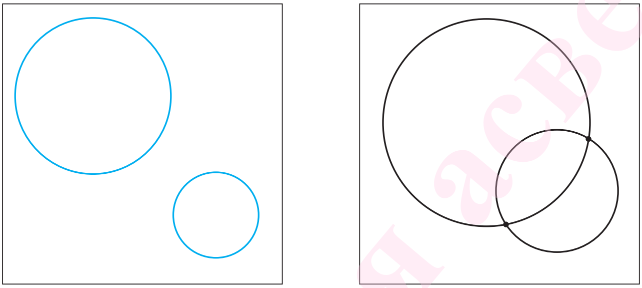
4) Прямые AB и AC — искомые касательные к данной окружности.

Доказательство. По построению $\angle OBA = 90°$ и $\angle OCA = 90°$ (см. задачу № 251 учебного пособия «Геометрия, 7»), т. е. $AB \perp OB$ и $AC \perp OB$. Следовательно, по признаку касательной AB и AC — касательные.

3. Взаимное расположение двух окружностей. Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух окружностей в плоскости. Возможны следующие случаи взаимного расположения двух различных окружностей:

1) *окружности не имеют общих точек* (в этом случае говорят, что они *не пересекаются* (рис. 11, *а*));

2) *окружности имеют две общие точки* (в этом случае говорят, что окружности *пересекаются* (рис. 11, *б*));

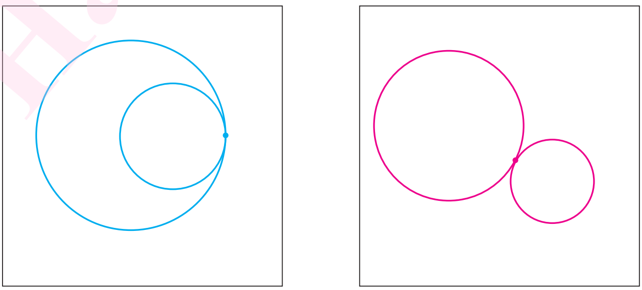


а) *б)*

Рис. 11

3) *окружности имеют только одну общую точку, и одна из окружностей лежит внутри круга, ограниченного другой окружностью* (в этом случае говорят, что они *касаются внутренним образом* (рис. 12, *а*));

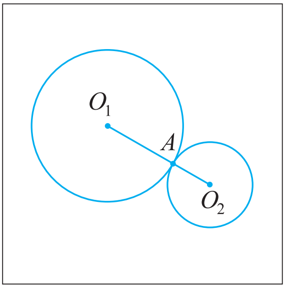
4) *окружности имеют только одну общую точку, и ни одна из окружностей не лежит внутри круга, ограниченного другой окружностью* (в этом случае говорят, что они *касаются внешним образом* (рис. 12, *б*)).



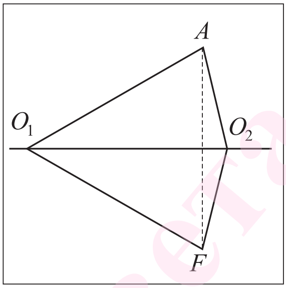
а) *б)*

Рис. 12

Задача 1. Докажите, что если две окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме их радиусов, т. е. $O_1O_2 = R_1 + R_2$.



а)



б)

Рис. 13

Доказательство.

1) Пусть окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ касаются внешним образом в точке A (рис. 13, *а*).

2) Докажем, что точка A лежит на отрезке O_1O_2. Допустим, что точка A не лежит на отрезке O_1O_2. Заметим, что в случае внешнего касания точка A не может лежать на продолжении отрезка O_1O_2. Пусть точка касания A не лежит на отрезке O_1O_2 (рис. 13, *б*). Тогда $O_1A = R_1$ и $O_2A = R_2$.

3) Пусть F — точка, симметричная точке A относительно прямой O_1O_2. Тогда $O_1F = O_1A = R_1$ и $O_2F = O_2A = R_2$, а значит, точка F принадлежит каждой окружности. Таким образом, окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ имеют две общие точки A и F, что противоречит условию их касания. Следовательно, точка касания A лежит на отрезке O_1O_2.

4) Докажем, что $O_1O_2 = R_1 + R_2$. Точка A лежит на отрезке O_1O_2, значит, $O_1O_2 = O_1A + O_2A = R_1 + R_2$.

Теорема доказана.

Справедливо и обратное утверждение.

Задача 2. Докажите, если расстояние между центрами двух окружностей, лежащих в плоскости, равно сумме их радиусов, то такие окружности касаются внешним образом.

Доказательство.

1) Пусть даны две окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ и известно, что $O_1O_2 = R_1 + R_2$. Докажем, что окружности касаются внешним образом.

2) На отрезке O_1O_2 рассмотрим точку A такую, что $O_1A = R_1$. Тогда $O_2A = O_1O_2 - O_1A = (R_1 + R_2) - R_1 = R_2$. Таким образом, точка A принадлежит каждой из данных окружностей.

3) Докажем, что окружности не имеют других общих точек. Действительно, на прямой O_1O_2 таких точек нет. Предположим, что существует точка X вне прямой O_1O_2, принадлежащая каждой окружности. Тогда $O_1X = R_1$ и $O_2X = R_2$. В треугольнике O_1O_2X длина стороны O_1O_2 равна сумме длин сторон O_1X и O_2X, что невозможно.

4) Таким образом, предположение о существовании еще одной точки, принадлежащей окружностям $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$, приводит к противоречию. Следовательно, других общих точек, кроме точки A, не существует, т. е. окружности касаются.

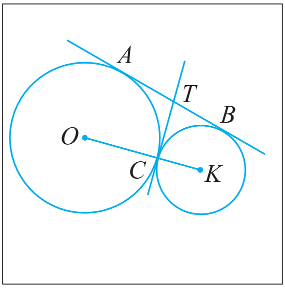
5) Докажем, что окружности касаются внешним образом. Для любой точки F окружности $\omega_2(O_2, R_2)$ выполняется условие $O_1F \geqslant |O_1O_2 - O_2F| = |R_1 + R_2 - R_2| = R_1$. Таким образом, либо точка F лежит вне окружности $\omega_1(O_1, R_1)$, когда $O_1F > R_1$, либо эта точка принадлежит обеим окружностям, если $O_1F = R_1$. Но в этом случае точка F есть точка A касания окружностей. Следовательно, окружность $\omega_2(O_2, R_2)$ расположена вне части плоскости, ограниченной окружностью $\omega_1(O_1, R_1)$. Аналогично можно доказать, что окружность $\omega_1(O_1, R_1)$ расположена вне части плоскости, ограниченной окружностью $\omega_2(O_2, R_2)$. Теперь доказано, что окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ касаются внешним образом.

Задача 3. Докажите, что две окружности касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно модулю разности их радиусов.

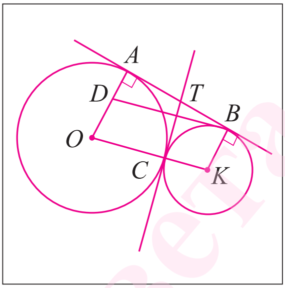
Другими словами, если окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ касаются внутренним образом, то $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$. И наоборот, если выполняется равенство $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$, то окружности касаются внутренним образом.

Задача 4. Две окружности с центрами в точках O и K, радиусы которых равны 16 см и 9 см соответственно, касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведена общая касательная AB, где точки A и B — точки касания.

Общая касательная, проведенная через точку C, пересекает касательную AB в точке T (рис. 14, *а*). Вычислите длину отрезка CT.



а)



б)

Рис. 14

Решение.

Для решения задачи воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенные к окружности из одной точки, равны, а радиусы, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательной. Учтем также, что окружности касаются внешним образом, а значит, расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.

1) Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $TC = TA = TB$, т. е. $TC = \frac{1}{2}AB$. Значит, нам необходимо вычислить длину отрезка AB.

2) Так как окружности касаются внешним образом, то $OK = OC + CK = 16 + 9 = 25$ (см).

3) Рассмотрим четырехугольник $ODBK$. Пусть $D \in OA$ и $BD \parallel OK$ (рис. 14, *б*). Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\angle BAD = 90°$, т. е. треугольник BAD — прямоугольный. Следовательно, $AB = \sqrt{DB^2 - DA^2}$.

4) Четырехугольник $ODBK$ — параллелограмм, так как его противолежащие стороны параллельны, значит, $DB = OK = 25$ см. Кроме того, $DA = OA - OD = OA - KB = 16 - 9 = 7$ (см). Тогда $AB = \sqrt{DB^2 - DA^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (см). Следовательно, $TC = \frac{1}{2}AB = 12$ (см).

Ответ: $TC = 12$ см.

Вопросы к § 1

1. Перечислите все случаи взаимного расположения прямой и окружности.

2. При выполнении каких соотношений между радиусом окружности и расстоянием от ее центра до прямой эта прямая: а) пересекает окружность; б) имеет одну общую точку с окружностью; в) не пересекает окружность?

3. Какая прямая называется касательной к окружности?

4. Сформулируйте свойство касательной.

5. Сформулируйте признак касательной.

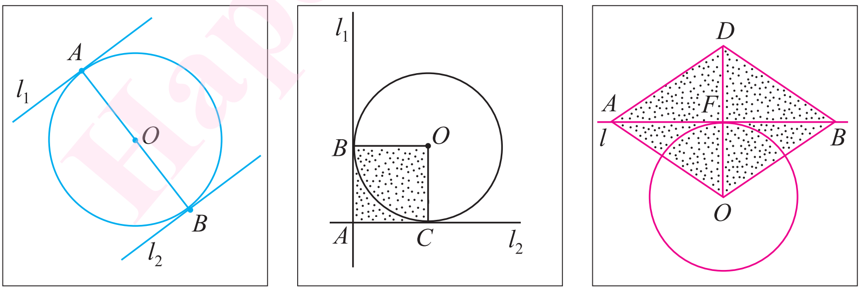
6. Каким свойством обладает радиус, проведенный в точку касания прямой и окружности?

7. Каким свойством обладают отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки?

Задачи к § 1

1. Отрезок AB — диаметр окружности. Прямые l_1 и l_2 касаются окружности в точках A и B (рис. 15, *а*). Докажите, что прямые l_1 и l_2 параллельны.

2. Перпендикулярные прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A. Окружность с центром в точке O касается прямых l_1 и l_2 в точках B и C соответственно (рис. 15, *б*). Докажите, что четырехугольник $ABOC$ — квадрат.



а) *б)* *в)*

Рис. 15

3. Прямая l касается в точке F окружности, центром которой является точка O. Точки A, B принадлежат прямой l, и $AF = FB$ (рис. 15, *в*). Точка D лежит на луче OF так, что $OF = FD$. Докажите, что четырехугольник $OADB$ — ромб.

4. Точка S — центр окружности, радиус которой равен 4 см. Прямая l касается окружности в точке E. Точка A лежит на касательной так, что $\angle ESA = 60°$. Вычислите расстояние от точки A до центра окружности.

5. Точка F — точка касания прямой l и окружности, центром которой является точка O. Точка D лежит на касательной так, что $DO : OF = 2 : 1$. Докажите, что градусная мера угла FOD равна $60°$.

6. Точка F — точка касания прямой l и окружности, центром которой является точка O. Отрезок AO ($A \in l$) пересекает окружность в точке T, а отрезок FT равен радиусу окружности. Вычислите длину отрезка AF, если $FT = 2$ см.

7. Окружность, центром которой является точка O, касается прямой l в точке A. Точка F лежит на прямой l и расположена от точек O и A на расстоянии 25 см и 24 см соответственно. Вычислите длины отрезков, на которые окружность делит отрезок OF.

8. Точка A и окружность радиуса 6 см лежат в плоскости, расстояние от точки A до центра окружности равно 12 см. Вычислите градусную меру угла между касательными к окружности, проведенными через точку A.

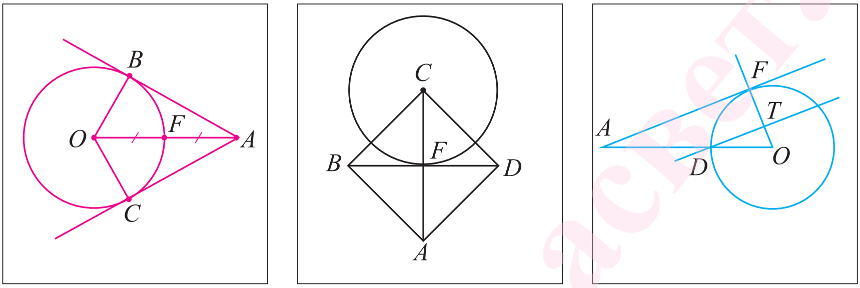
9. Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности, центром которой является точка O. Вычислите радиус окружности, если $AO = 8$ см, а $\angle BAC = 60°$.

10. Точка D — точка касания прямой l и окружности, центром которой служит точка O. Точка C лежит на прямой l так, что площадь треугольника CDO равна 24 см^2. Вычислите расстояние между точками O и C, если радиус окружности равен 6 см.

11. Точка O — центр окружности, радиус которой равен 5 см. Прямая l касается окружности в точке A. Точка B лежит на прямой l на расстоянии 13 см от центра окружности. Вычислите площадь треугольника OAB.

12. Через точку A, лежащую вне окружности $\omega(O, R)$, проведены прямые, которые касаются окружности в точках B и C. Окружность пересекает отрезок OA в точке F и $OF = FA$ (рис. 16, *а*). Докажите, что $\angle BOC = 120°$.

13. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке F. Докажите, что окружность $\omega(C, CF)$ касается прямой BD (рис. 16, *б*).



а) *б)* *в)*

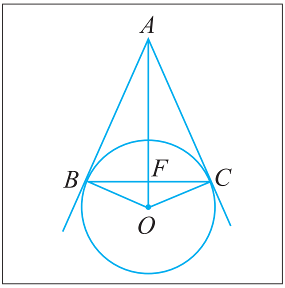
Рис. 16

14. Прямая AF касается окружности, центром которой является точка O, в точке F. Окружность пересекает отрезок AO в точке D. Через точку D проведена прямая DT ($T \in OF$), параллельная прямой AF. Вычислите длину отрезка AO, если радиус окружности равен 6 см, а расстояние от центра окружности до прямой DT равно 2 см (рис. 16, *в*).

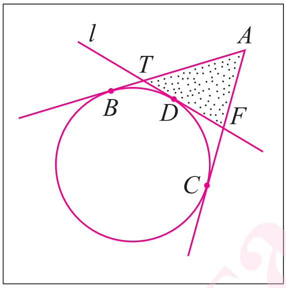
15. Точка O — центр окружности, радиус которой равен 1 см. Прямые AB и AC — касательные к окружности, где B и C — точки касания. Вычислите градусную меру угла BAC, если длина отрезка касательной равна $\sqrt{3}$ см.

16. Через точку A к окружности $\omega(O, R)$ проведены две касательные, градусная мера угла между которыми равна 60°. Найдите длину хорды, соединяющей точки касания.

17. Через точку A к окружности, центром которой является точка O, проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Хорда BC пересекает отрезок OA в точке F. Вычислите радиус окружности, если длина хорды BC равна 8 см, а длина отрезка AF равна 16 см (рис. 17, *а*).



а)



б)

Рис. 17

18. Через точку A к окружности, центром которой является точка O, проведены две касательные. Вычислите расстояния от точки A до точек касания, если радиус окружности равен 5 см, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8 см.

19. Через точку A к окружности проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Через точку D этой окружности проведена еще одна касательная l, как показано на рисунке 17, *б*. Точки T и F — точки пересечения прямой l с касательными AB и AC соответственно. Найдите периметр треугольника ATF, если известно, что $AB = a$.

20. Точка A лежит вне окружности и удалена от ее центра на расстояние 13 см. Через точку A проведены две касательные. Расстояние между точками касания равно 12 см. Вычислите радиус окружности.

21. Через точку A к окружности, центром которой является точка O, проведены две касательные, градусная мера угла между которыми равна α. Найдите длину хорды, соединяющей точки касания, если $OA = a$.

22. Через точку проведены две касательные к окружности, градусная мера угла между которыми равна 2α. Расстояние от центра окружности до хорды, соединяющей точки касания, равно a. Найдите длины отрезков касательных.

23. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Радиус одной окружности равен 2 см. Общая касательная к этим окружностям проходит через точку A и пересекает другую их общую касательную в точке B. Вычислите радиус другой окружности, если длина отрезка AB равна 4 см.

24. К окружности, радиус которой равен R, проведены взаимно перпендикулярные касательные AC и AB. Точка F лежит между точками касания B и C на меньшей дуге окружности. Через точку F проведена касательная, которая пересекает прямые AC и AB в точках E и T соответственно. Найдите периметр треугольника AET.

25. Две окружности касаются внешним образом в точке A и лежат по одну сторону от их общей касательной BC, где B и C — точки касания. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = a$, $AC = b$.

26. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Докажите, что отрезок их общей касательной, концами которого служат точки касания, равен $2\sqrt{Rr}$.

27. Окружность радиуса R касается сторон угла, градусная мера которого равна $60°$. Найдите радиус меньшей окружности, которая касается сторон угла и данной окружности.

28. Две окружности касаются внешним образом, а каждая из них касается сторон данного угла. Вычислите синус угла, сторонами которого являются биссектриса и сторона данного угла, если радиусы окружностей равны 2 см и 4 см.

29. Окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внешним образом и лежат по одну сторону от их общей касательной. Градусная мера угла между касательной и прямой, проходящей через центры окружностей, равна α. Найдите отношение R к r.

30. Две окружности касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведена общая внешняя касательная AB, где A и B — точки касания. Общая касательная, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке T. Вычислите длину отрезка CT, если известно, что радиусы окружностей равны 9 см и 16 см.

31. В угол вписаны три окружности. Средняя окружность касается двух других окружностей, радиусы которых R_1 и R_2. Найдите радиус средней окружности.

32. Постройте окружность, которая проходит через данную точку A и касается данной прямой l в данной точке P, принадлежащей прямой l.

33. Постройте окружность, которая касается сторон данного угла, причем одной из них в данной на ней точке F.

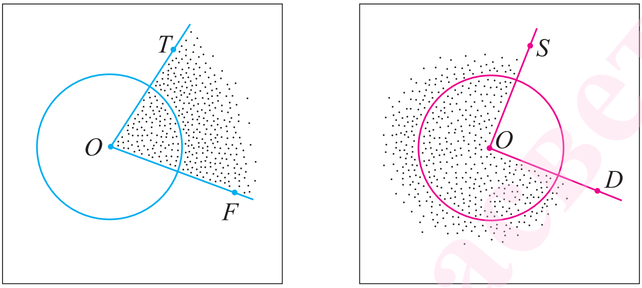
34. Постройте окружность, которая проходит через данную точку A и касается данной окружности в данной на ней точке F.

35. Постройте окружность, которая касается данной окружности с центром в данной точке O, в данной на ней точке T и данной прямой l, не пересекающей данную окружность.

§ 2. Центральные и вписанные углы

1. Центральные углы. Градусная мера дуги окружности. В данном параграфе изучим понятия центрального и вписанного углов.

Определение. **Центральным углом окружности называется угол с вершиной в центре этой окружности.**

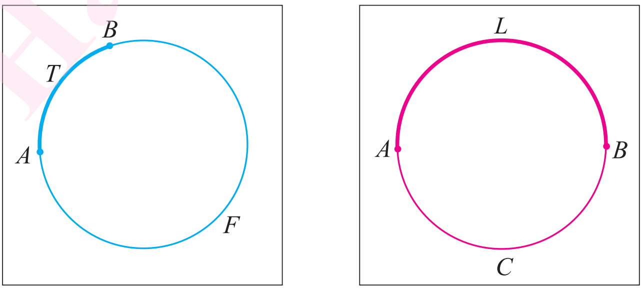


а) *б)*

Рис. 18

Например, на рисунке 18, *а* изображен центральный угол TOF, который *меньше развернутого угла,* а на рисунке 18, *б* — центральный угол SOD — *больше развернутого угла.*

Любые две различные точки A и B окружности служат концами двух дуг. Для различия этих дуг на каждой из них отмечается некоторая промежуточная точка. Например, если на дугах отмечены точки F и T, то в этом случае дуги обозначаются $\cup ATB$ и $\cup AFB$ и данная запись читается так: «дуга ATB и дуга AFB» (рис. 19, *а*). Если понятно, о какой из двух дуг идет речь, употребляется также обозначение $\cup AB$.



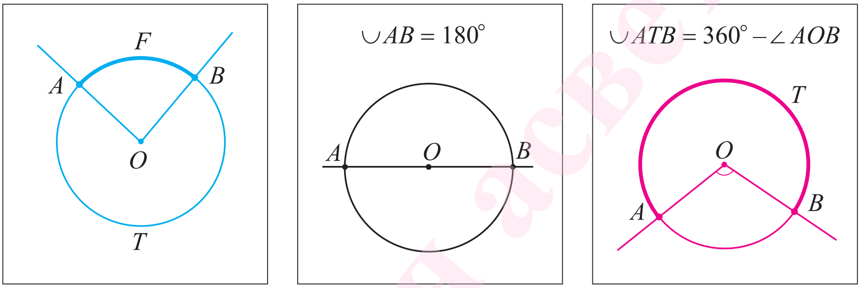
а) *б)*

Рис. 19

Дуга AB окружности *называется полуокружностью*, если ее концы служат концами диаметра этой окружности.

Например, на рисунке 19, *б* изображены полуокружности ALB и ACB.

Пусть точки A и B не являются концами диаметра окружности с центром в точке O. Тогда лучи OA и OB служат сторонами двух центральных углов, один из которых меньше, а другой больше развернутого угла (рис. 20, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 20

Дуга AB *окружности* $\omega(O, R)$ и *центральный угол* AOB, *внутри которого лежит эта дуга, называются соответствующими*.

Если дуга окружности лежит внутри соответствующего ей центрального угла, который меньше развернутого угла, то говорят, что эта дуга *меньше полуокружности*.

Если дуга окружности лежит внутри соответствующего ей центрального угла, который больше развернутого угла, то говорят, что дуга *больше полуокружности*.

Например, на рисунке 20, *а* изображены дуга AFB, которая меньше полуокружности, и дуга ATB — больше полуокружности.

Для сравнения дуг окружности вводится понятие *градусной меры* дуги окружности.

Дадим определение градусной меры дуги окружности.

Определение. **Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.**

Градусная мера дуги AB, как и сама дуга, обозначается $\cup AB$.

Таким образом, если дуга AB окружности меньше полуокружности, а $\angle AOB$ — соответствующий ей центральный угол, то $\cup AB = \angle AOB$ (см. рис. 20, *а*).

Если дуга AB является полуокружностью, то ее градусная мера равна $180°$ (рис. 20, *б*).

Градусная мера дуги ATB, которая больше полуокружности и дополняет дугу AB, меньшую полуокружности, до окружности, равна $360° - \angle AOB$, где угол AOB соответствует дуге AB (рис. 20, *в*).

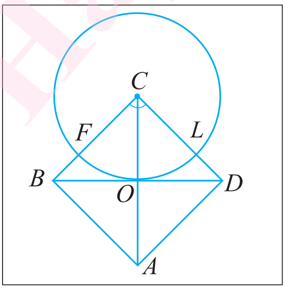
Понятие градусной меры дуги позволяет определить понятие равенства дуг окружности.

Две дуги одной и той же окружности называются равными, если равны их градусные меры.

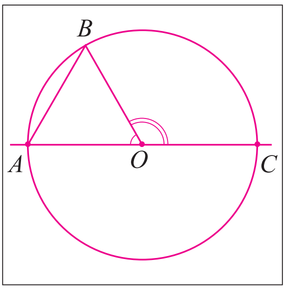
Если градусная мера дуги AB равна $33°$, то пишут $\cup AB = 33°$. Читают: «Градусная мера дуги AB равна $33°$», или кратко «Дуга AB равна $33°$».

Рассмотрим примеры. Пусть диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность $\omega(C, CO)$ пересекает стороны BC и CD квадрата в точках F и L соответственно. Тогда $\cup FOL = 90°$, а градусная мера дуги FO, которая меньше полуокружности, равна $45°$. Градусная мера дуги FLO, которая больше полуокружности, равна $360° - \angle FCO = 360° - 45° = 315°$ (рис. 21, *а*).

Рассмотрим еще один пример. Пусть точка O — центр окружности, отрезок AB — хорда окружности, равная ее радиусу, а отрезок AC — диаметр окружности (рис. 21, *б*).



а)



б)

Рис. 21

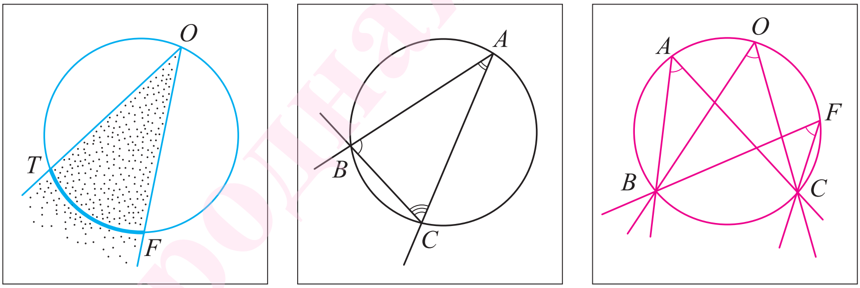
Тогда градусная мера дуги AB, которая меньше полуокружности, равна 60°, так как треугольник AOB — равносторонний, а значит, градусная мера соответствующего ей центрального угла AOB равна 60°. Градусная мера дуги BC, которая меньше полуокружности, равна 120°, так как градусная мера соответствующего ей центрального угла BOC равна 120°.

Можем вычислить градусную меру дуги BAC, которая больше полуокружности: $\cup BAC = 360° - \angle BOC = 360° - 120° = 240°$.

2. Вписанные углы. Рассмотрим понятие вписанного угла.

Определение. **Угол называется вписанным в окружность, если он меньше развернутого угла, вершина его лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.**

Например, на рисунке 22, *а* изображен вписанный угол TOF. Если точки A, B и C лежат на окружности, то каждый из угов ABC, BCA, CAB является вписанным (рис. 22, *б*).



а) *б)* *в)*

Рис. 22

Пусть $\angle TOF$ — вписанный угол, при этом T и F — точки пересечения его сторон с окружностью, а TF — дуга, которая лежит внутри этого вписанного угла. В этом случае говорят, что *вписанный угол TOF опирается на дугу TF* (см. рис. 22, *а*).

Например, на рисунке 22, *в* изображены вписанные углы BAC, BOC и BFC, которые опираются на одну и ту же дугу BC.

Теперь докажем теорему о вписанном угле.

Т е о р е м а 1 (*о вписанном угле*). ***Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.***

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть вписанный в окружность $\omega(O, R)$ угол ABC опирается на дугу AC. Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Рассмотрим три возможных случая. Центр O окружности лежит: 1) на одной из сторон угла; 2) во внутренней области угла; 3) во внешней области угла.

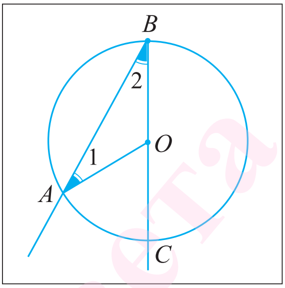


Рис. 23

Первый случай. Центр O окружности лежит на одной из сторон угла ABC, например на стороне BC (рис. 23).

1) Дуга AC меньше полуокружности, следовательно, $\cup AC = \angle AOC$.

2) Угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника AOB, значит, $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$.

3) Так как углы при основании равнобедренного треугольника AOB равны, то $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle AOC$.

4) Так как $\angle ABC = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle AOC$ и $\angle AOC = \cup AC$, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Второй случай. Центр O окружности лежит во внутренней области угла.

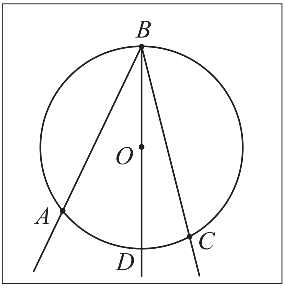


Рис. 24

1) Пусть D — точка пересечения луча BO и дуги AC (рис. 24). Тогда по доказанному в первом случае $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$.

2) $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC$.

Таким образом, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Третий случай. Центр O окружности лежит во внешней области угла ABC.

1) Пусть D — точка пересечения луча BO с окружностью (рис. 25). Тогда согласно доказанному в первом случае

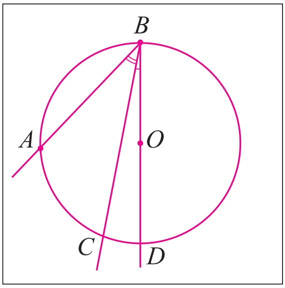


Рис. 25

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD \text{ и } \angle CBD = \frac{1}{2} \cup CD.$$

2) $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD =$

$= \frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2}(\cup AD - \cup CD) =$
$= \frac{1}{2} \cup AC.$

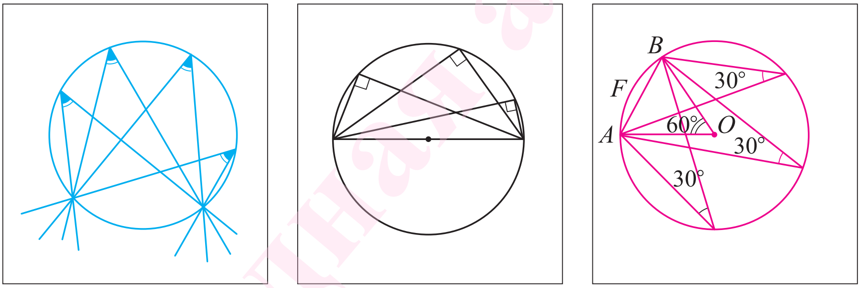
Таким образом, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$

Теорема доказана.

Из данной теоремы получим следующие следствия.

Следствие 1. ***Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны*** **(рис. 26, *а*).**

Следствие 2. ***Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой*** **(рис. 26, *б*).**

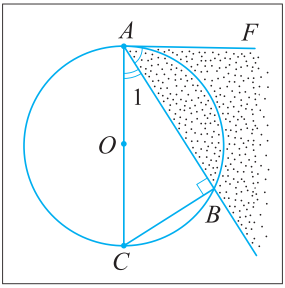


а) *б)* *в)*

Рис. 26

Рассмотрим пример. Пусть хорда AB соединяет концы дуги AFB и равна радиусу окружности $\omega(O, R)$. Тогда градусная мера каждого из вписанных углов, опирающихся на дугу AFB, равна 30° (рис. 26, *в*). Действительно, градусная мера центрального угла AOB равна 60°, значит, $\cup AFB = 60°$. Каждый из указанных углов опирается на дугу AFB, следовательно, градусная мера каждого из них равна $\frac{1}{2} \cup AFB = 30°$.

Теорема 2 (*об угле между хордой и касательной*). ***Градусная мера угла, сторонами которого служат касательная и хорда, равна половине градусной меры дуги, расположенной внутри этого угла.***



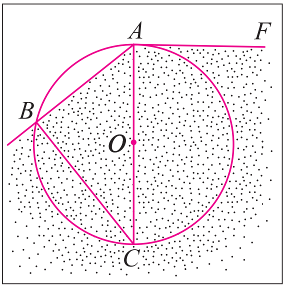


Рис. 27

Дано: $\omega(O, R)$,
AF — касательная,
AB — хорда.

Доказать:
$\angle FAB = \frac{1}{2} \cup AB$.

Доказательство.

Первый случай. Пусть угол FAB — острый (рис. 27, *а*).

1) Проведем диаметр AC. Тогда вписанный угол CBA опирается на полуокружность, значит, по следствию **2** он прямой, т. е. $\angle CBA = 90°$.

2) Треугольник CBA — прямоугольный, следовательно, $\angle ACB = 90° - \angle 1$.

3) Так как диаметр AC перпендикулярен касательной FA, то $\angle FAB = 90° - \angle 1$. Таким образом, $\angle FAB = \angle ACB$. Так как вписанный угол ACB опирается на дугу AB, то $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$.

Следовательно, $\angle FAB = \frac{1}{2} \cup AB$.

Второй случай. Пусть угол FAB — тупой (рис. 27, *б*). Проведем диаметр CA. Тогда

$$\angle FAB = \angle BAC + \angle CAF = \frac{1}{2} \cup BC + \frac{1}{2} \cup CA =$$

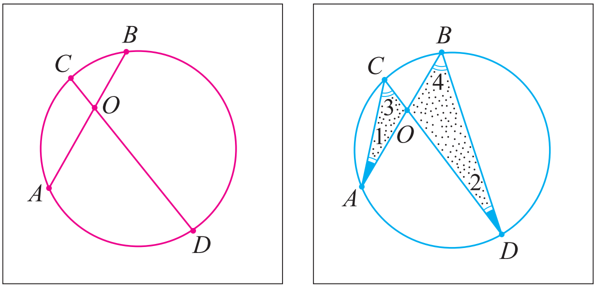
$$= \frac{1}{2}(\cup BC + \cup CA) = \frac{1}{2} \cup BCA,$$

но дуга BCA лежит внутри тупого угла FAB.

Теорема доказана.

3. Свойство пересекающихся хорд. Теорема о касательной и секущей.

Теорема 3 (*об отрезках пересекающихся хорд*). ***Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.***



а) *б)*

Рис. 28

Дано:
AB, CD — хорды окружности,
$O = AB \cap CD$
(рис. 28, *а*).
Доказать:
$AO \cdot OB =$
$= CO \cdot OD$.

Доказательство.

1) Проведем хорды AC и BD (рис. 28, *б*). Рассмотрим треугольники AOC и DOB.

2) Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу CB. Кроме того, $\angle 3 = \angle 4$, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу AD.

3) Треугольник AOC подобен треугольнику DOB по первому признаку подобия треугольников, так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

4) Из подобия треугольников AOC и DOB следует, что

$$\frac{CO}{OB} = \frac{AO}{OD}.$$

Значит,

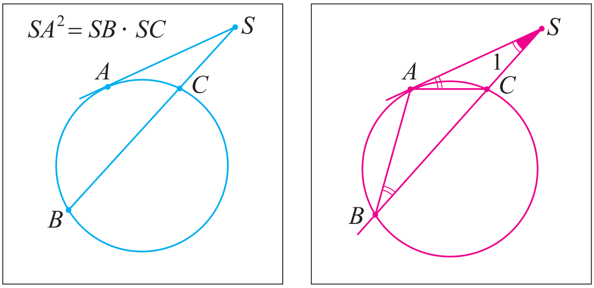
$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

Теорема доказана.

Пусть через точку S, лежащую вне окружности, проведена секущая, которая пересекает окружность в точках C и B, и $SC < SB$.

Тогда отрезок SB называется *отрезком секущей*, а отрезок SC — ее *внешней частью*.

Теорема 4 (*об отрезках секущей и касательной*). ***Если через точку, лежащую вне круга, ограниченного окружностью, провести к этой окружности касательную и секущую, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и ее внешней части.***



а) б)

Рис. 29

Дано: $\omega(O, R)$, SA — касательная, SB — секущая, SC — внешняя часть секущей (рис. 29, *а*).

Доказать: $SA^2 = SB \cdot SC$.

Доказательство.

1) Проведем хорды AC и AB (рис. 29, *б*).

2) По теореме о вписанном угле $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Кроме того, в силу теоремы **2** имеем $\angle SAC = \frac{1}{2} \cup AC$. Значит, $\angle ABC = \angle SAC$.

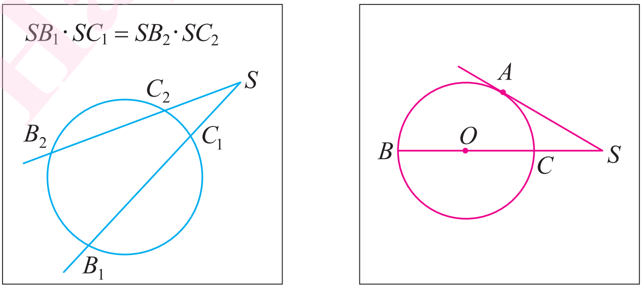
3) Так как $\angle ABC = \angle SAC$ и $\angle 1$ — общий угол треугольников ASB и CSA, то эти треугольники подобны.

4) Из подобия треугольников ASB и CSA следует, что выполняется равенство $\frac{AS}{SC} = \frac{SB}{AS}$, или $AS^2 = SB \cdot SC$.

Теорема доказана.

Из данной теоремы получим следствие.

Следствие. ***Если через точку S, лежащую вне круга, ограниченного окружностью, проведены две секущие, пересекающие окружность соответственно в точках C_1, B_1 и C_2, B_2, то $SB_1 \cdot SC_1 = SB_2 \cdot SC_2$*** (рис. 30, *а*).



а) б)

Рис. 30

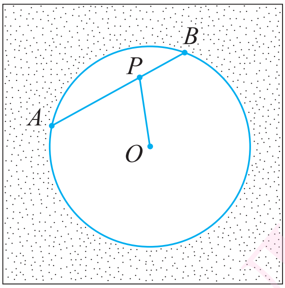
Задача 1. Через точку S проведена секущая, которая проходит через центр O окружности $\omega(O, R)$ и пересекает ее в точках C и B, $SC : CB = 1 : 2$. Найдите длину отрезка SA касательной (рис. 30, *б*).

Решение.

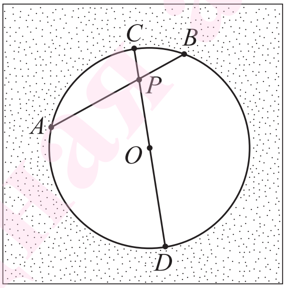
По теореме об отрезках секущей и касательной имеем $SA^2 = SC \cdot SB$. Так как $SC : CB = 1 : 2$, а $CB = 2R$, то $SC = R$ и $SB = SC + CB = 3R$. Тогда $SA^2 = SC \cdot SB = 3R \cdot R = 3R^2$. Отсюда $SA = R\sqrt{3}$.

Ответ: $SA = R\sqrt{3}$.

Задача 2. Радиус круга равен 7,5 см. Точка P лежит внутри круга на расстоянии 6,5 см от его центра O. Через точку P проведена хорда AB, длина которой равна 9 см. Вычислите длины отрезков, на которые точка P делит хорду AB.



а)



б)

Рис. 31

Дано: $\omega(O, R)$,
$R = 7{,}5$ см,
$P \in AB$,
$PO = 6{,}5$ см,
$AB = 9$ см.

Найти:
BP и AP.

Решение.

Воспользуемся теоремой об отрезках пересекающихся хорд.

1) Пусть C и D — точки пересечения прямой OP с границей круга (рис. 31, б). Тогда $CO = OD = 7{,}5$ см.

2) По теореме об отрезках пересекающихся хорд имеем $AP \cdot PB = CP \cdot PD$, или $PB(9 - PB) = CP \cdot PD$.

3) Заметим, что $CP = CO - PO = 7{,}5 - 6{,}5 = 1$ (см). Кроме того, $PD = PO + OD = 7{,}5 + 6{,}5 = 14$ (см). Таким образом, $(9 - PB) \cdot PB = 14$. Отсюда найдем: $PB = 2$ см или $PB = 7$ см. Следовательно, $PB = 2$ см и $AP = 7$ см или $PB = 7$ см и $AP = 2$ см.

Ответ: 2 см, 7 см.

Вопросы к § 2

1. Какой угол называется центральным углом?

2. Что называется градусной мерой дуги окружности?

3. Какой угол называется вписанным в окружность?

4. Сформулируйте теорему о вписанном угле.

5. Верно ли, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны?

6. Чему равна градусная мера угла, опирающегося на диаметр окружности?

7. Чему равна градусная мера угла, сторонами которого служат касательная и хорда?

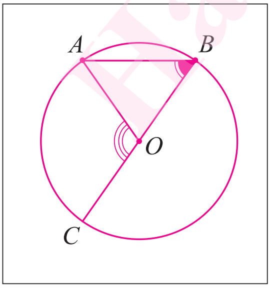
8. Сформулируйте теорему об отрезках пересекающихся хорд.

9. Сформулируйте теорему об отрезках секущей и касательной.

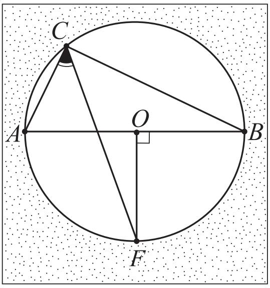
Задачи к § 2

36. Хорда AB равна радиусу окружности, центром которой является точка O, отрезок BC — диаметр окружности (рис. 32, *а*). а) Вычислите градусную меру вписанного угла ABC; б) Чему равна градусная мера центрального угла AOC?

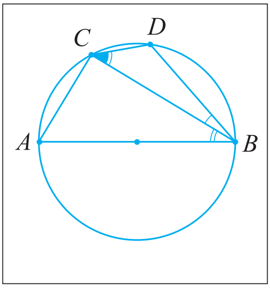
37. В круге, центром которого является точка O, проведен диаметр AB и перпендикулярный ему радиус OF (рис. 32, *б*). а) Вычислите градусную меру вписанного угла ACF. б) Докажите, что луч CF — биссектриса угла ACB.



а)



б)



в)

Рис. 32

38. Отрезок AB — диаметр окружности, а точки C и D лежат на окружности по одну сторону от прямой AB так, что градусные меры углов CBA и CBD равны $30°$ и $20°$ соответственно (рис. 32, *в*). Вычислите градусную меру угла DCB.

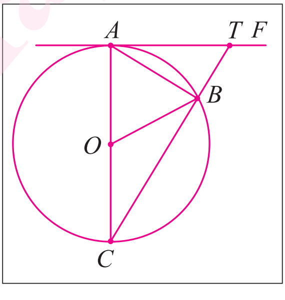
39. Хорда AB окружности $\omega(O, OF)$ равна ее радиусу. Отрезок CB — диаметр окружности, $OF \perp AB$. Вычислите градусную меру вписанного угла FCB.

40. Отрезок AB — хорда окружности, центром которой является точка O, а радиус равен 10 см. Градусная мера центрального угла AOB равна $60°$. Вычислите: а) длину хорды AB; б) расстояние от центра окружности до прямой AB.

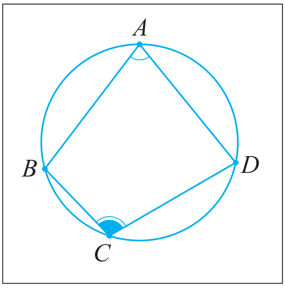
41. Градусная мера дуги CD окружности, центром которой является точка O, равна $60°$. Вычислите расстояние: а) от точки C до прямой DO, если радиус окружности равен 4 см; б) от точки C до точки, диаметрально противолежащей точке D.

42. Отрезок AC — диаметр окружности, центром которой является точка O. Прямая AF — касательная к окружности, отрезок AB — хорда окружности, равная ее радиусу, $T = AF \cap CB$ (рис. 33, *а*). а) Чему равна градусная мера меньшей дуги, концами которой являются точки A и B? б) Докажите, что $BT : AT = 1 : 2$.

43. Точки A, B, C и D лежат на окружности так, что градусная мера угла BAD равна $50°$ (рис. 33, *б*). а) Чему равна градусная мера дуги BCD? б) Вычислите градусную меру угла BCD.



а)



б)

Рис. 33

44. AB — диаметр окружности. Точки C и D лежат на окружности по одну сторону от прямой AB так, что градусная мера угла ABD равна 45°. Вычислите градусную меру угла DCB.

45. В окружности проведены две параллельные хорды CD и AB. Докажите, что градусные меры дуг, которые расположены между этими хордами, равны.

46. Хорды AB и AC окружности расположены так, что $\cup AB = 124°$, а градусная мера угла BAC равна 72°. Вычислите градусную меру дуги AC.

47. Отрезок AC — диаметр окружности радиуса R. Хорда BC равна радиусу окружности. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения прямой CB и касательной к окружности, проходящей через точку A.

48. Точка F окружности удалена от концов ее диаметра AB на расстояния 9 см и 12 см. Вычислите радиус данной окружности.

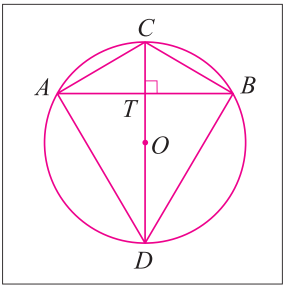
49. Расстояние от точки окружности до одного из концов ее диаметра равно 8 см, радиус окружности равен 5 см. Вычислите расстояние от данной точки до другого конца диаметра окружности.

50. Диаметром окружности является катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Вычислите расстояние от точки C до точки D, в которой окружность пересекает гипотенузу, если известно, что $BD = 4$ см и $AD = 9$ см.

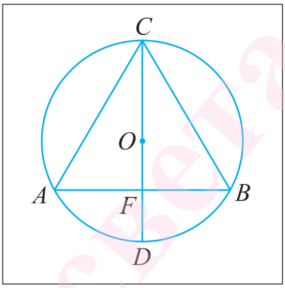
51. Длина перпендикуляра FD, проведенного из точки F окружности к ее диаметру AB, равна 24 см. Точка D делит диаметр AB в отношении $9:16$. Вычислите радиус окружности.

52. Хорда AB перпендикулярна диаметру CD круга и проходит через середину T радиуса CO (рис. 34, a). Найдите периметр четырехугольника $ACBD$, если радиус окружности равен R.

53. Диаметр CD окружности перпендикулярен хорде AB и пересекает ее в точке F, которая является серединой радиуса OD (рис. 34, *б*). а) Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен R. б) Докажите, что треугольник ABC является равносторонним.



а)



б)

Рис. 34

54. На стороне BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке D. Вычислите площадь треугольника ABC, если $CD = 6$ см и $DB : DA = 4 : 9$.

55. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке F, которая является серединой хорды AB. Вычислите длину хорды AB, если $CD = 25$ см и $FC = 9$ см.

56. Хорды AB и CD окружности проходят через точку O, которая является серединой хорды AB. Вычислите длину хорды AB, если $CO = 9$ см и $CO : OD = 1 : 3$.

57. Точка O — основание перпендикуляра, проведенного из точки F окружности к диаметру AB, $AO = a$, $BO = b$. Докажите, что $FO = \sqrt{ab}$.

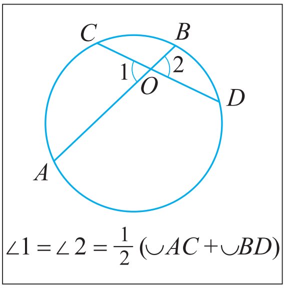
58. Точка F делит хорду AB окружности в отношении $1 : 3$, считая от точки A, хорда CD пересекает хорду AB в точке F. Чему равна длина хорды AB, если $CD = 40$ см и $DF = 10$ см?

59. Точка O — основание перпендикуляра, проведенного из точки F окружности к ее диаметру AB. Вычислите радиус окружности, если $BO = 8$ см и $FO = 12$ см.

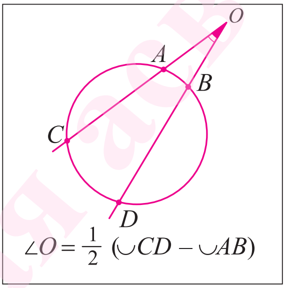
60. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке O. Вычислите длины отрезков DO и OC, если $AO = 4$ см, $BO = 6$ см, а длина отрезка DO на 5 см больше длины отрезка CO.

61. Диаметр AB и хорда CD окружности перпендикулярны и пересекаются в точке O. Вычислите радиус окружности, если $AO = 2$ см, а длина хорды CD на 2 см меньше диаметра окружности.

62. Хорды AB и DC окружности пересекаются в точке O (рис. 35, *а*). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.



а)



б)

Рис. 35

63. Точки A, C, B и D лежат на окружности. Прямые AC и BD пересекаются в точке O (рис. 35, *б*). Докажите, что $\angle O = \frac{1}{2}(\cup CD - \cup AB)$.

64. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорды AB и AC большей окружности пересекают меньшую окружность в точках O и F соответственно. Докажите, что $AO : OB = AF : FC$.

65. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Отрезок AB — диаметр большей окружности. Хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Найдите градусную меру угла CAB, если $\angle CBA = \alpha$.

66. Прямая AB касается окружности в точке A. Точка C лежит на окружности так, что угол BAC является острым. Точка F лежит на дуге AC и во внутренней области острого угла BAC так, что $\cup AF = \cup FC$. Найдите расстояние от точки F до касательной, если $d(F, AC) = a$.

67. Прямая SA касается окружности $\omega(O, R)$ в точке A. Луч SO пересекает окружность в точке B. Центр окружности расположен между точками S и B. Найдите расстояние от центра окружности до точки S, если $SB = 3SA$.

68. В треугольнике ABC $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CA = 3$ см. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает прямую AC в точке K, лежащей на луче CA, а прямую AB — в точке T. Известно, что $AK = 1$ см. Вычислите длины отрезков AT и KT.

69. Вершины треугольника ABC лежат на окружности и $AB : BC = 2 : 3$. Точка T делит дугу AC пополам, хорда BT пересекает сторону AC в точке F, а хорда DE проходит через точку F, $DF = 8$ см и $FE = 12$ см. Вычислите длину стороны AC.

70. Стороны SO и SF угла OSF пересекают окружность в точках A, B и C, D соответственно. Градусные меры дуг AC, CD, DB и BA в указанном порядке находятся в отношении $4 : 6 : 10 : 16$. Вычислите градусную меру угла OSF.

71. Через точку S внутри окружности проведены две прямые l_1 и l_2, пересекающие окружность соответственно в точках C, D и A, B. Градусные меры дуг AC, CB, BD и DA в указанном порядке находятся в отношении $2 : 4 : 6 : 8$. Вычислите градусные меры углов с вершиной S.

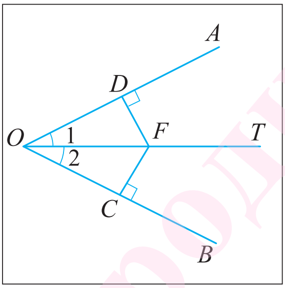
§ 3. Замечательные точки треугольника

Ранее мы уже отмечали следующие свойства: *медианы треугольника пересекаются в одной точке*; *биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке*; *высоты треугольника, или прямые, их содержащие, пересекаются в одной точке*.

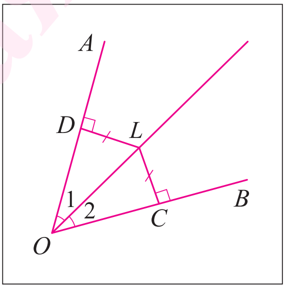
Теорема о свойстве медиан треугольника была доказана в восьмом классе. Сейчас докажем теоремы о свойствах биссектрис и высот треугольника.

1. Теорема о точке пересечения биссектрис треугольника. Предварительно докажем одно свойство биссектрисы угла.

Теорема 1 (*о свойстве биссектрисы угла*). ***Каждая точка биссектрисы угла, который меньше развернутого, равноудалена от его сторон. Каждая точка указанного угла, равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.***



а)



б)

Рис. 36

Доказательство.

I. *Докажем, что каждая точка биссектрисы угла, который меньше развернутого угла, равноудалена от его сторон.*

1) Пусть луч OT — биссектриса угла AOB, т. е. $\angle 1 = \angle 2$, а F — произвольная точка биссектрисы OT. Проведем перпендикуляры FC и FD к прямым BO и AO соответственно и докажем, что $FC = FD$ (рис. 36, *а*).

2) Рассмотрим прямоугольные треугольники OFD и OFC. Эти треугольники равны по гипотенузе и острому углу (отрезок OF — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$).

3) Из равенства треугольников OFD и OFC следует, что $FC = FD$.

Что и требовалось доказать.

II. *Докажем, что если точка равноудалена от сторон угла, который меньше развернутого угла, то она лежит на его биссектрисе.*

1) Пусть точка L равноудалена от сторон угла AOB, т. е. перпендикуляры LD и LC, проведенные к сторонам угла, равны. Докажем, что луч OL — биссектриса угла AOB (рис. 36, *б*).

2) Рассмотрим прямоугольные треугольники ODL и OCL. Эти треугольники равны по гипотенузе и катету (отрезок OL — общая гипотенуза, $LD = LC$).

3) Из равенства треугольников ODL и OCL следует, что $\angle 1 = \angle 2$, т. е. луч OL — биссектриса угла AOB.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2 (*о точке пересечениия биссектрис*). ***Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.***

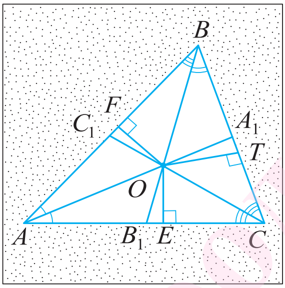


Рис. 37

Доказательство.

1) Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажем, что они пересекаются в одной точке (рис. 37).

Пусть O — точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1, отрезки OF, OT и OE — перпендикуляры, проведенные из точки O к прямым AB, BC и AC соответственно.

2) Так как луч AO является биссектрисой угла BAC, то по теореме о свойстве биссектрисы угла выполняется равенство $OE = OF$. Так как луч BO — биссектриса угла ABC, то $OF = OT$ также по теореме о свойстве биссектрисы угла. Отсюда следует, что $OE = OT$.

3) Равенство $OE = OT$ означает, что точка O равноудалена от сторон угла ACB. Следовательно, по теореме о свойстве биссектрисы угла получим, что точка O лежит на биссектрисе угла ACB. Иначе говоря, биссектриса CC_1 проходит через точку O. Таким образом, все три биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O.

Теорема доказана.

2. Теорема о точке пересечения прямых, содержащих высоты треугольника. Ранее было введено понятие серединного перпендикуляра к отрезку и доказана теорема о серединном перпендикуляре: *каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов. И обратно: если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.*

Воспользуемся этими свойствами для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3 (*о точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника*). ***Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.***

Доказательство.

Пусть l_1, l_2 и l_3 — серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC и AC треугольника ABC соответственно (рис. 38). Докажем, что серединные перпендикуляры l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке.

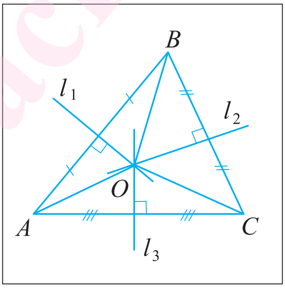


Рис. 38

1) Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров l_1 и l_2. Тогда по теореме о серединном перпендикуляре справедливы равенства $OA = OB$ (так как прямая l_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AB) и $OB = OC$ (так как прямая l_2 — серединный перпендикуляр к отрезку BC). Отсюда следует, что $OA = OC$.

2) Равенство $OA = OC$ означает, что точка O равноудалена от вершин A и C. Значит, по теореме о серединном перпендикуляре точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC. Таким образом, все три серединных перпендикуляра l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

Воспользуемся теоремой **3** для доказательства свойства высот треугольника.

Теорема 4 (*о точке пересечения прямых, на которых лежат высоты треугольника*). ***Прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.***

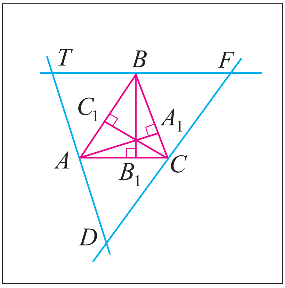


Рис. 39

Доказательство.

1) Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты произвольного треугольника ABC (рис. 39). Докажем, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

2) Проведем через вершины A, B и C прямые, параллельные сторонам BC, AC и AB соответственно. Пусть T, F и D — точки их пересечения.

3) Докажем, что точки A, B и C являются соответственно серединами сторон TD, TF и FD треугольника TFD. Например, докажем, что точка C — середина стороны DF. Так как четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = DC$. Так как $ABFC$ — параллелограмм, то $AB = CF$. Таким образом, $DC = CF$.

4) Аналогично доказывается, что $AT = AD$ и $TB = BF$. По условию $AA_1 \perp BC$, а по построению $TD \parallel BC$, следовательно, $AA_1 \perp TD$. Аналогично $BB_1 \perp TF$ и $CC_1 \perp DF$. Значит, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника TFD. Следовательно, они пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

Точка пересечения медиан, *точка пересечения биссектрис* и *точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника*, называются *замечательными точками* треугольника.

Заметим, что если треугольник остроугольный, то пересекаются в одной точке сами его высоты, а если треугольник тупоугольный, то пересекаются в одной точке прямые, содержащие высоты.

Вопросы к § 3

1. Каким свойством обладает биссектриса угла?

2. Верно ли, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке?

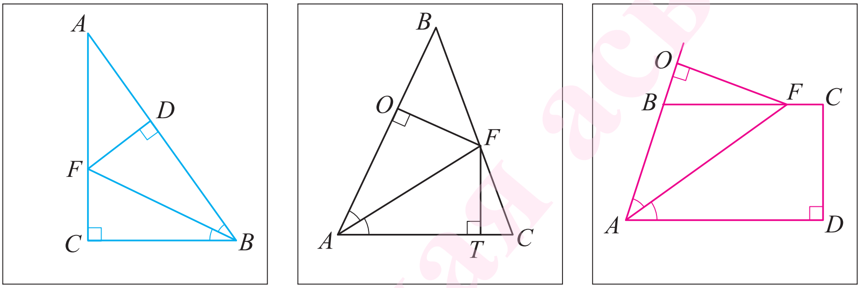
3. Каким свойством обладают серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника?

4. Сформулируйте теорему о свойстве прямых, содержащих высоты треугольника.

5. Верно ли, что точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника равноудалена от вершин треугольника?

Задачи к § 3

72. Отрезок BF — биссектриса прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB. Длина перпендикуляра FD, проведенного к прямой AB, равна 4 см (рис. 40, *а*). Вычислите длину отрезка FC.



а) *б)* *в)*

Рис. 40

73. Отрезок AT — биссектриса прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Отрезок TK — перпендикуляр, проведенный к гипотенузе AB. Вычислите длину отрезка BK, если $AC = 7$см и $AB = 10$ см.

74. Отрезок AF — биссектриса треугольника ABC. Высота FO треугольника ABF равна 2 см (рис. 40, *б*). Может ли высота FT треугольника AFC быть равной 2,5 см?

75. $ABCD$ — прямоугольная трапеция, луч AF ($F \in BC$) является биссектрисой угла BAD, отрезок FO — перпендикуляр, проведенный к прямой AB (рис. 40, *в*). Докажите, что отрезок OF равен высоте трапеции.

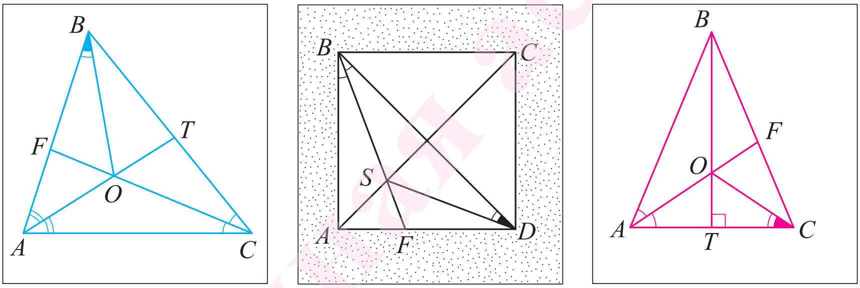
76. В треугольнике ABC с прямым углом при вершине C проведена биссектриса CF. Вычислите расстояния от точки F до прямых AC и BC, если $CF = 4\sqrt{2}$ см.

77. Отрезок AO — биссектриса прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Вычислите площадь треугольника AOB, если $CO = 3$ см, $AB = 12$ см.

78. Биссектрисы BF и AT равнобедренного треугольника ABC, основанием которого является отрезок BC, пересекаются в точке O. Вычислите длину отрезка OT, если $AB = 14$ см, а площадь треугольника AOB равна 35 см^2.

79. Биссектрисы AF и BK треугольника ABC пересекаются в точке O. Верно ли, что $\angle OCA = \angle OCB$?

80. В треугольнике ABC биссектрисы CF и AT пересекаются в точке O (рис. 41, *а*). Вычислите градусную меру угла ABO, если $\angle OAC = 31°$, $\angle OCB = 22°$.



а) *б)* *в)*

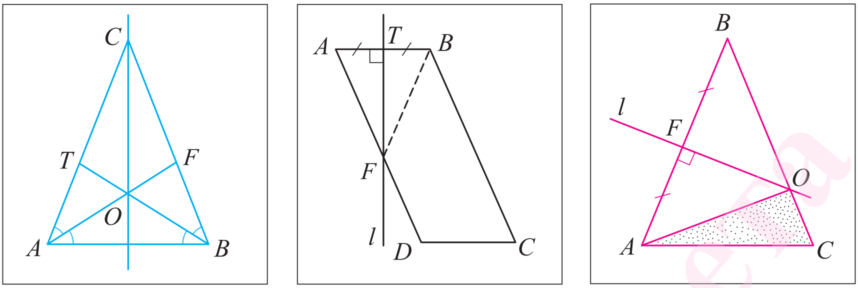
Рис. 41

81. Биссектриса BF угла ABD пересекает диагональ AC квадрата $ABCD$ в точке S (рис. 41, *б*). Вычислите градусную меру угла SDB.

82. Основанием равнобедренного треугольника ABC является отрезок AC. Биссектриса AF и высота BT треугольника пересекаются в точке O (рис. 41, *в*). Вычислите градусную меру угла OCT, если $\angle ABC = 40°$.

83. Биссектрисы AF и BT углов при основании равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 42, *а*). Докажите, что прямая CO перпендикулярна основанию AB данного треугольника.

84. Серединный перпендикуляр l к стороне AB параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке F, которая является ее серединой (рис. 42, *б*). Вычислите расстояние от вершины B до точки F, если $BC = 18$ см.



а) *б)* *в)*

Рис. 42

85. Серединный перпендикуляр l к боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону BC в точке O (рис. 42, *в*). Докажите, что периметр треугольника AOC равен сумме длин сторон AB и AC.

86. Серединный перпендикуляр l к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC пересекает сторону AC в точке F так, что $AF = 10$ см. Вычислите периметр треугольника FBC, если $BC = 8$ см.

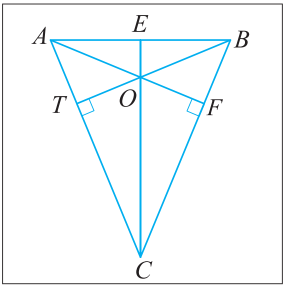
87. На медиане BF треугольника ABC постройте точку, равноудаленную от вершин B и C.

88. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l. Постройте равнобедренный треугольник, основанием которого является отрезок AB, а вершина лежит на прямой l.

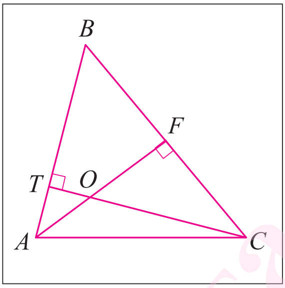
89. Постройте прямоугольный треугольник по катету a и сумме s другого катета и гипотенузы.

90. Высоты CF и AT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ABO = \angle ACO$.

91. Высоты AF и BT равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) пересекаются в точке O и $E = CO \cap AB$ (рис. 43, *а*). Докажите, что отрезок CE — медиана треугольника ABC.



а)



б)

Рис. 43

92. Высоты AF и CT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 43, *б*). Известно, что $AT : FC = 1 : 2$. Вычислите длину отрезка OC, если $AO = 4$ см.

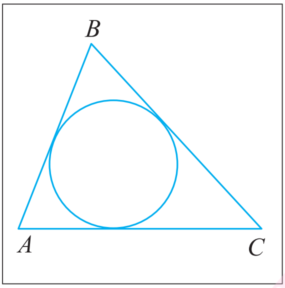
93. Высоты AF и CT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Вычислите высоту треугольника AOC, проведенную из вершины O, если $AO = BF = 8$ см, $OF = 6$ см.

§ 4. Вписанные и описанные треугольники

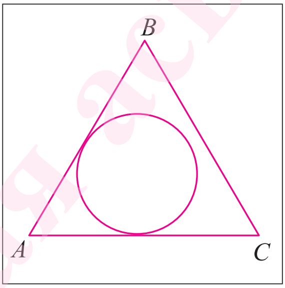
1. Окружность, вписанная в треугольник. Рассмотрим понятие окружности, вписанной в треугольник.

Определение. **Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех сторон треугольника. В этом случае треугольник называется описанным около окружности.**

Например, на рисунке 44, *а* изображена окружность, вписанная в треугольник ABC. Окружность, которая изображена на рисунке 44, *б* не является вписанной в треугольник ABC, так как она не касается стороны BC.



а)



б)

Рис. 44

Круг называется вписанным в треугольник, если его граница вписана в этот треугольник.

Следующая теорема дает ответ на вопрос о существовании окружности, вписанной в треугольник.

Теорема 1 (*о существовании окружности, вписанной в треугольник*). ***В любой треугольник можно вписать единственную окружность.***

Доказательство.

I. *Докажем, что в треугольник можно вписать окружность.*

1) Пусть O — точка пересечения биссектрис произвольного треугольника ABC (рис. 45).

2) Отрезки OK, OE и OT — перпендикуляры, проведенные из точки O к сторонам AB, BC и AC соответственно.

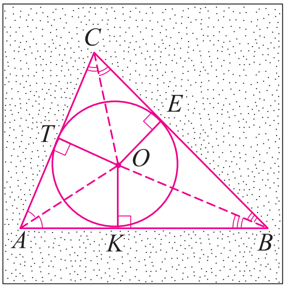


Рис. 45

3) По теореме о биссектрисе угла точка O равноудалена от сторон треугольника, следовательно, $OK = OE = OT$. Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом, равным отрезку OK, проходит через точки K, E и T.

4) Стороны AB, BC и AC треугольника касаются этой окружности в точках K, E и T, так как они перпендикулярны радиусам OK, OE и OT соответственно. Следовательно, окружность с центром в точке O и радиусом OK является вписанной в треугольник ABC. Существование вписанной окружности доказано.

II. *Докажем, что такая окружность единственная.*

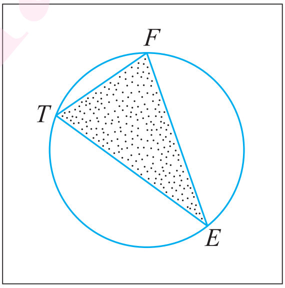
Допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой из окружностей равноудален от сторон треугольника, а следовательно, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника; ее радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Таким образом, эти окружности совпадают. Теорема доказана.

2. Окружность, описанная около треугольника. Рассмотрим понятие окружности, описанной около треугольника.

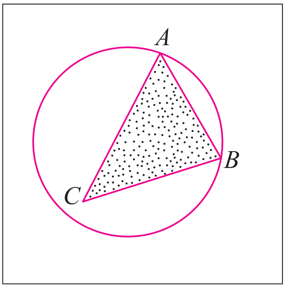
Определение. **Окружность называется описанной около треугольника, если все его вершины лежат на этой окружности. В этом случае треугольник называется вписанным в окружность.**

Например, на рисунке 46, *а* изображена окружность, которая является описанной около треугольника TFE. Окружность, которая изображена на рисунке 46, *б*, не является описанной около треугольника ABC, так как вершина C не лежит на окружности.

Круг называется описанным около треугольника, если его граница описана около этого треугольника.



а)



б)

Рис. 46

Докажем теорему о существовании описанной около треугольника окружности.

Теорема 2 (*о существовании окружности, описанной около треугольника*). ***Около любого треугольника можно описать единственную окружность.***

Доказательство.

I. *Докажем, что около треугольника можно описать окружность.*

1) Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам произвольного треугольника ABC (рис. 47).

2) Так как точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от его концов, то $OA = OB = OC$. Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом, равным отрезку OA, проходит через все вершины треугольника ABC, а значит, является описанной около этого треугольника.

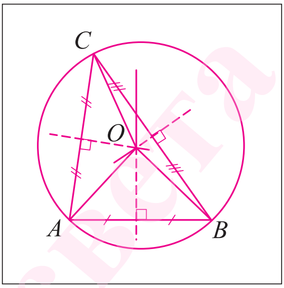
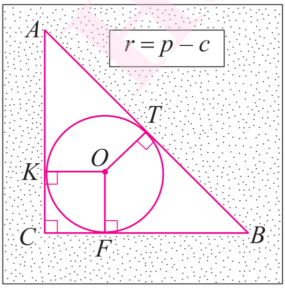


Рис. 47

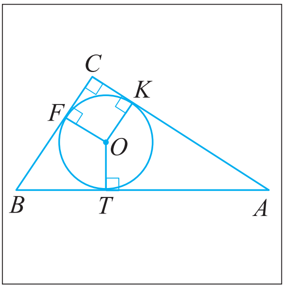
II. *Докажем, что такая окружность единственная.*

Предположим, что около треугольника можно описать еще одну окружность. Тогда ее центр равноудален от вершин треугольника, а следовательно, совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; ее радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Таким образом, окружности совпадают. Теорема доказана.

Задача 1. Докажите, что радиус r вписанной в прямоугольный треугольник окружности можно найти по формуле $r = p - c$, где p — полупериметр прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы.



а)



б)

Рис. 48

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $AB = c$, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр.

Доказать: $r = p - c$.

Доказательство.

1) Пусть K, T, F — точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами AC, AB и BC треугольника ABC, точка O — центр этой окружности (рис. 48, *а*, *б*).

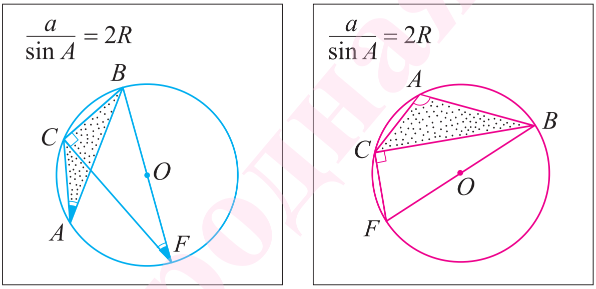
Четырехугольник $CKOF$ — квадрат (т. к. $\angle OKC = \angle KCF = \angle CFO = 90°$, $CK = CF$), значит, $CF = CK = OK = OF = r$.

2) Отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, следовательно, $AT = AK = AC - r$ и $BT = BF = BC - r$.

3) Так как $AT + BT = c$, то $(AC - r) + (BC - r) = c$. Таким образом, $r = \frac{AC + BC - c}{2}$ или $r = \frac{AC + BC + c - 2c}{2} = \frac{AC + BC + c}{2} - c = p - c$.

Что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что для произвольного треугольника ABC выполняется равенство $\frac{a}{\sin A} = 2R$, где a — длина стороны, лежащей против угла A, R — радиус описанной окружности.



а) *б)*

Рис. 49

Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, R — радиус описанной окружности.

Доказать: $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Доказательство.

Пусть около треугольника ABC описана окружность. Проведем диаметр BF этой окружности. Возможны три случая.

Первый случай. Углы A и F опираются на одну дугу (рис. 49, *а*). Тогда $\angle A = \angle F$. В прямоугольном треугольнике BCF $\sin F = \frac{BC}{BF} = \frac{a}{2R}$, а, значит, $\sin A = \frac{a}{2R}$ или $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Второй случай. Углы A и F опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, т. е. $\angle A + \angle F = 360° : 2 = 180°$ (рис. 49, *б*). Тогда $\angle F = 180° - \angle A$. В прямоугольном треугольнике BCF $\sin F = \frac{BC}{BF} = \frac{a}{2R}$. Но так как $\sin F = \sin(180° - \angle A) = \sin A$, то в этом случае также $\sin A = \frac{a}{2R}$ или $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Третий случай. Если треугольник BAC прямоугольный с прямым углом при вершине A, то формула верна, так как в этом случае $\sin A = 1$ и сторона, лежащая против угла A, является диаметром окружности, т. е. $a = 2R$.

Что и требовалось доказать.

Вопросы к § 4

1. Какая окружность называется вписанной в треугольник?

2. Верно ли, что в любой треугольник можно вписать окружность?

3. Какая точка является центром окружности, вписанной в треугольник?

4. Какой треугольник называется описанным около окружности?

5. Какая окружность называется описанной около треугольника?

6. Какой треугольник называется вписанным в окружность?

7. Какая точка является центром окружности, описанной около треугольника?

8. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, если известны длина стороны и градусная мера противолежащего ей угла треугольника?

Задачи к § 4

94. Точка O — центр окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC, $F = BO \cap AC$ (рис. 50, *а*). а) Верно ли, что $\angle OAF = 30°$? б) Вычислите градусную меру угла BOA. в) Вычислите высоту треугольника ABC, если радиус вписанной в него окружности равен 2 см.

95. Вычислите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если длина его стороны равна $4\sqrt{3}$ см.

96. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр треугольника.

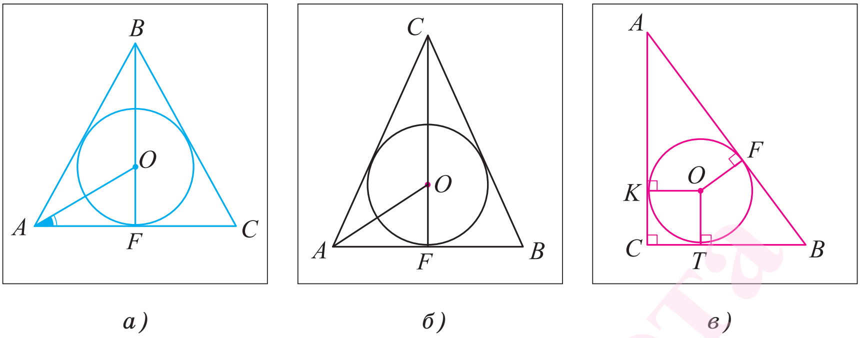


Рис. 50

97. Точка O — центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC, основанием которого является отрезок AB, $F = AB \cap CO$ (рис. 50, *б*). Вычислите отношение $CO : OF$, если $CF = 4$ см и $AB = 6$ см.

98. Вычислите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, если длина его основания равна 10 см, а длина боковой стороны — 13 см.

99. Вычислите длину основания равнобедренного треугольника, если его периметр равен 32 см, а центр вписанной окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении $5 : 3$, считая от вершины.

100. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C, касается сторон треугольника в точках F, T и K (рис. 50, *в*). Вычислите длину гипотенузы треугольника, если $AK + TB = 10$ см.

101. В прямоугольный треугольник вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Вычислите периметр треугольника, если длина его гипотенузы равна 13 см.

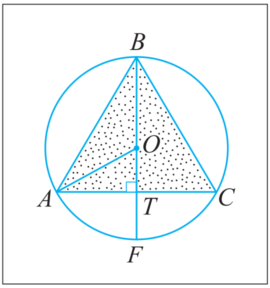
102. В прямоугольный треугольник ABC $(\angle ACB = 90°)$ вписана окружность. Вычислите радиус этой окружности, если $AC = 2\sqrt{3}$ см и $\angle BAC = 60°$.

103. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 8 см и 15 см. Вычислите расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности.

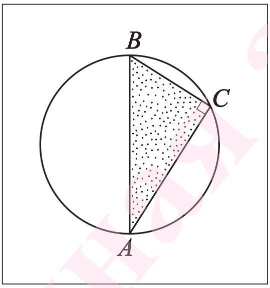
104. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка ее касания с гипотенузой делит гипотенузу на части, длины которых равны 6 см и 4 см. Вычислите радиус окружности.

105. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 5 см, а длина одного из катетов равна 12 см. Вычислите периметр треугольника.

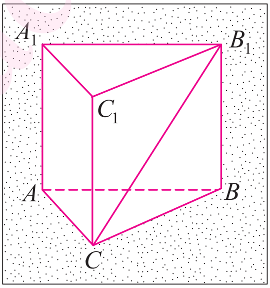
106. Точка O — центр окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, отрезок BF — диаметр окружности, $T = BF \cap AC$ (рис. 51, *а*). а) Докажите, что $OT = TF$. б) Верно ли, что $\angle AOT = 60°$? в) Вычислите высоту треугольника, если радиус описанной окружности равен 6 см.



а)



б)



в)

Рис. 51

107. Вычислите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если длина его стороны равна 10 см.

108. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр этого треугольника.

109. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность (рис. 51, *б*). Вычислите радиус этой окружности, если $AC = 8$ см и $BC = 6$ см.

110. Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, если $\angle CBA = 30°$ и $AC = 9$ см.

111. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма (все боковые грани прямой призмы — прямоугольники), основанием которой служит прямоугольный треугольник ACB с прямым углом C (рис. 51, *в*). Вычислите диаметр окружности, описанной около треугольника CBB_1, если $AB = 13$ см, $AC = 5$ см и $BB_1 = 5$ см.

112. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 5 см, а длина одного из катетов равна 8 см.

113. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 10 см, а высота, проведенная из его вершины к основанию, равна 8 см. Вычислите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

114. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R, а длина его боковой стороны равна a. Найдите высоту треугольника, которая проведена к его основанию.

115. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 13 см, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $7\frac{1}{24}$ см. Вычислите площадь этого треугольника.

116. Около равнобедренного треугольника ABC, основанием которого является отрезок AC, описана окружность с центром в точке O, отрезок BF — диаметр окружности, $T = BF \cap AC$. Вычислите длину диаметра BF, если $BC = 10$ см, $BT = 8$ см.

117. Вычислите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, если длина его основания равна 10 см, а длина боковой стороны — 13 см.

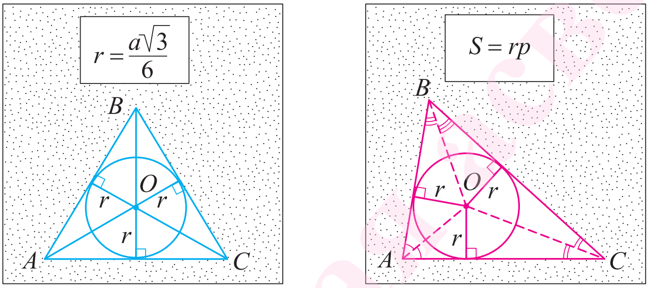
118. ABC — равнобедренный треугольник, основание которого — отрезок AC. Вычислите радиус окружности, описанной около этого треугольника, если $\angle ABC = 120°$ и $AB = 12$ см.

119. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна $30°$, а его боковая сторона равна a. Докажите, что диаметр окружности, описанной около этого треугольника, равен $2a$.

120. Длина стороны равностороннего треугольника равна a. Докажите, что радиус r вписанной в этот треугольник окружности можно найти по формуле $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (рис. 52, *а*).

121. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен r. Докажите, что площадь этого треугольника можно найти по формуле $S = 3\sqrt{3}\,r^2$ (см. рис. 52, *а*).

122. Докажите, что площадь S произвольного треугольника можно найти по формуле $S = rp$, где p — полупериметр этого треугольника, r — радиус вписанной окружности (рис. 52, *б*).



а) *б)*

Рис. 52

123. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен R, а градусная мера угла при его основании равна φ. Найдите площадь треугольника.

124. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC. Вычислите площадь боковой грани призмы, если радиус окружности, вписанной в основание призмы, равен $\sqrt{3}$ см, а длина диагонали боковой грани равна 10 см.

125. В прямоугольный треугольник, градусная мера одного из углов которого равна $60°$, вписана окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь этого треугольника.

126. Вычислите периметр прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

127. Периметр прямоугольного треугольника равен 90 см, а радиус вписанной в него окружности равен 4 см. Вычислите длины катетов этого треугольника.

128. Около окружности, радиус которой равен 5 см, описан прямоугольный треугольник. Высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 см. Вычислите длину гипотенузы.

129. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 24 см, вписана окружность. Точка касания гипотенузы и окружности делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Вычислите длины сторон треугольника.

130. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ACB с прямым углом C. Вычислите длину диагонали грани AA_1B_1B, если длина одного из катетов треугольника ACB равна 3 см, радиус вписанной в него окружности равен 1 см, а площадь грани AA_1B_1B равна 60 см^2.

131. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b, а радиусы вписанной и описанной окружностей — r и R. Докажите, что $a + b = 2(r + R)$.

132. В прямоугольный треугольник вписана окружность, точка касания которой делит гипотенузу на отрезки, длины которых m и n. Докажите, что площадь S треугольника можно найти по формуле $S = mn$.

133. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен r, а длина его гипотенузы равна c. Докажите, что площадь S треугольника можно найти по формуле $S = r^2 + rc$.

134. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит его на два прямоугольных треугольника. Докажите, что $r + r_1 + r_2 = h$, где r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник; r_1, r_2— радиусы окружностей, вписанных в полученные треугольники; h — высота, проведенная к гипотенузе.

135. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Расстояние от центра окружности до вершины угла, противолежащего основанию, равно 10 см, а длина боковой стороны равна 20 см. Вычислите радиус вписанной окружности.

136. В равнобедренном треугольнике градусная мера угла при основании равна 30°. Высота, проведенная к основанию, больше радиуса вписанной окружности на 2 см. Вычислите длину основания треугольника.

137. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна h, а радиус вписанной окружности равен r.

138. В окружность вписан равнобедренный треугольник, длина основания которого равна 10 см, а длина боковой стороны — 12 см. Через середину высоты, проведенной к основанию треугольника, проведена хорда, параллельная основанию. Вычислите длину хорды.

139. Около равнобедренного треугольника описана окружность радиуса 25 см. Расстояние от центра окружности до основания равно 7 см. Вычислите площадь треугольника.

140. В равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 18 см, а длина основания — 12 см, вписана окружность. К ней проведена касательная, параллельная основанию. Вычислите длину отрезка касательной, который ограничен точками пересечения с боковыми сторонами.

141. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен R, а градусная мера одного из его острых углов равна α. Найдите радиус вписанной окружности.

142*. Отрезки BD и AE — высоты равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и AEC, равны соответственно 10 см и 12 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

143*. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и радиусу r вписанной окружности.

144*. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и медиане m, проведенной к катету.

§ 5. Вписанные и описанные четырехугольники

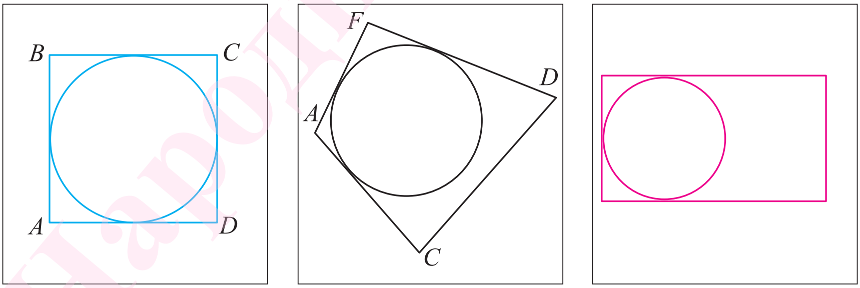
1. Окружность, вписанная в четырехугольник. Определим понятие окружности, вписанной в четырехугольник.

Определение. **Окружность называется вписанной в четырехугольник, если она касается всех сторон четырехугольника. В этом случае четырехугольник называется описанным около окружности.**

Например, на рисунке 53, *а* изображены квадрат $ABCD$ и вписанная в него окружность. Окружность, изображенная на рисунке 53, *б*, не является вписанной в четырехугольник $AFDC$, так как она не касается его стороны DC.

Заметим, что не в любой четырехугольник можно вписать окружность. Например, в прямоугольник, не являющийся квадратом, нельзя вписать окружность. Существует окружность, которая касается трех сторон такого прямоугольника, и не существует окружности, касающейся всех его четырех сторон (рис. 53, *в*).

Круг называется вписанным в четырехугольник, если его граница вписана в четырехугольник.



а) б) в)

Рис. 53

Следующая теорема характеризует свойство четырехугольника, в который можно вписать окружность.

Теорема 1 (*о свойстве четырехугольника, в который можно вписать окружность*). ***Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противолежащих сторон равны.***

Доказательство.

1) Пусть в четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, которая касается его сторон в точках F, O, T и E (рис. 54).

Докажем, что $AB + CD = BC + AD$.

2) Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $AF = AE = a$, $BF = BO = b$, $CO = CT = m$, $DT = DE = c$.

3) Таким образом, $AB + CD = (AF + FB) + (CT + DT) = a + b + c + m$ и $BC + AD = (BO + OC) + (AE + ED) = a + b + c + m$. Отсюда следует, что $AB + CD = BC + AD$.

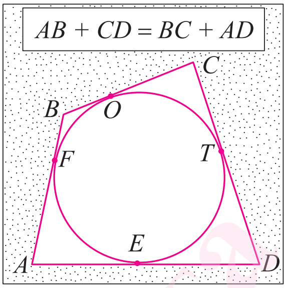


Рис. 54

Теорема доказана.

Справедливо и обратное утверждение, которое отвечает на вопрос, при каком условии в четырехугольник можно вписать окружность.

Теорема 2 (*условие, при котором в четырехугольник можно вписать окружность*). ***Если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противолежащих сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.***

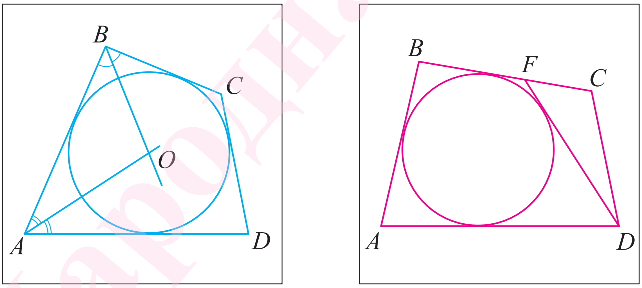


Рис. 55

Доказательство.

1) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

2) Рассмотрим окружность, которая касается трех сторон: AB, BC и AD. Центр O этой окружности есть точка пересечения биссектрис углов CBA и BAD (рис. 55, a).

3) Докажем, что эта окружность вписана в четырехугольник, т. е. что она касается также и стороны CD. Предположим,

что это не так. Тогда либо сторона CD не пересекает окружность, либо является секущей.

4) Пусть сторона CD не пересекает окружность (рис. 55, *б*). Проведем касательную DF, где $F \in BC$. Так как $ABFD$ — описанный четырехугольник, то верно равенство $AB + DF = AD + BF$. Кроме того, по условию $AB + CD = BF + FC + AD$. Отсюда следует, что $AB + CD = AB + DF + FC$ или $CD = DF + FC$, что невозможно, так как в треугольнике DFC длина стороны CD должна быть меньше суммы длин двух других сторон. Аналогично приводит к противоречию и предположение о том, что сторона CD является секущей.

5) Таким образом, предположение о том, что сторона CD не касается рассматриваемой окружности, неверно. Следовательно, сторона CD касается этой окружности, и, значит, окружность вписана в четырехугольник $ABCD$. Теорема доказана.

2. Окружность, описанная около четырехугольника. Определим понятие окружности, описанной около четырехугольника.

Определение. **Окружность называется описанной около четырехугольника, если все его вершины лежат на окружности. В этом случае четырехугольник называется вписанным в окружность.**

Круг называется описанным около четырехугольника, если его граница описана около четырехугольника.

Теперь рассмотрим свойство четырехугольника, вписанного в окружность.

Теорема 3 (*о свойстве четырехугольника, вписанного в окружность*). ***Если около четырехугольника описана окружность, то суммы градусных мер его противолежащих углов равны 180°.***

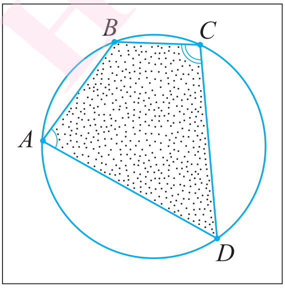


Рис. 56

Доказательство.

1) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 56). Докажем, что $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$.

2) Так как углы A и C — вписанные, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ и $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$.

Значит, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup BAD =$

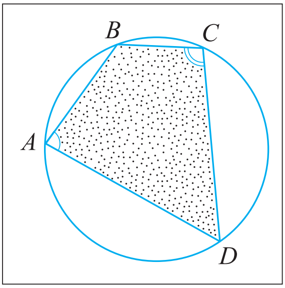
$= \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$

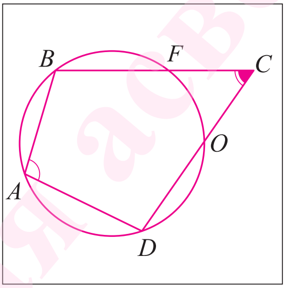
Так как сумма градусных мер углов четырехугольника $ABCD$ равна $360°$ и $\angle A + \angle C = 180°$, то $\angle B + \angle D = 180°$.

Теорема доказана.

Справедливо и обратное утверждение, которое характеризует условие, при котором около четырехугольника можно описать окружность.

Теорема 4 (*условие, при котором около четырехугольника можно описать окружность*). ***Если в четырехугольнике суммы градусных мер противолежащих углов равны 180°, то около такого четырехугольника можно описать окружность.***





а) *б)*

Рис. 57

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство $\angle A + \angle C = 180°$. Докажем, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность (рис. 57, *а*).

2) Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABD, и докажем, что эта окружность проходит также через вершину C. Предположим, что окружность не проходит через вершину C. Тогда либо вершина C лежит вне круга, границей которого служит рассматриваемая окружность, либо внутри этого круга.

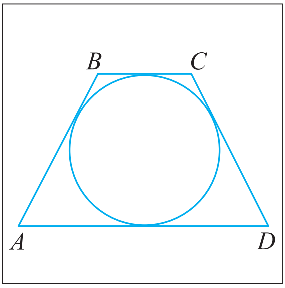
3) Пусть вершина C лежит вне круга (рис. 57, *б*). Обозначим буквами F и O точки пересечения сторон BC и DC с окружностью. Тогда $\angle C = \frac{1}{2}(\cup DAB - \cup FO)$. Следовательно, $\angle C < \frac{1}{2} \cup DAB$. Так как угол A является вписанным, то $\angle A =$ $= \frac{1}{2}\cup BOD$. Тогда $\angle A + \angle C < \frac{1}{2}(\cup BOD + \cup DAB) < \frac{360°}{2} = 180°$.

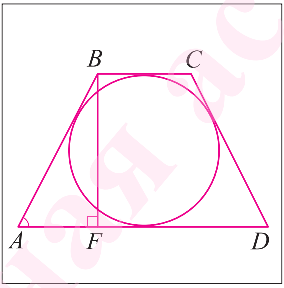
Это противоречит условию, значит, наше предположение неверно, т. е. окружность проходит через вершину C. Аналогично можно доказать, что вершина C не может лежать внутри круга. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *около любого прямоугольника можно описать окружность*.

Рассмотрим некоторые задачи, при решении которых используются доказанные теоремы.

Задача 1. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$, длина ее боковой стороны равна 10 см, а градусная мера одного из ее углов равна $60°$. Вычислите площадь трапеции.





а) *б)*

Рис. 58

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AB = CD = 10$ см, $\angle BAD = 60°$ (рис. 58, *а*).
Вычислить: S_{ABCD}.

Решение.

Для нахождения площади трапеции воспользуемся формулой $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — длины ее оснований, h — высота.

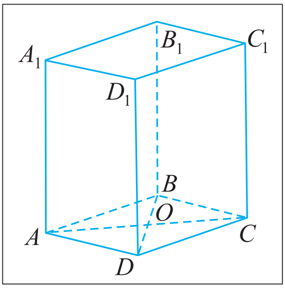
1) Пусть отрезок BF — высота трапеции. Тогда $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BF$ (рис. 58, *б*).

2) Так как в трапецию $ABCD$ вписана окружность, то $BC + AD = AB + CD$. Но так как трапеция равнобедренная, то $BC + AD = 2AB = 20$ см.

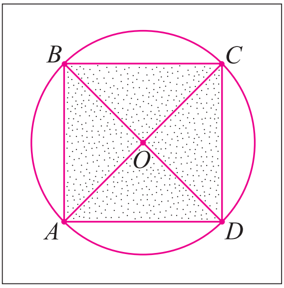
3) В прямоугольном треугольнике AFB длина катета $BF = AB \sin 60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ (см). Теперь вычислим площадь трапеции $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BF = \frac{20}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $50\sqrt{3}$ см^2.

Задача 2. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат. Вычислите площадь боковой грани параллелепипеда, если диаметр окружности, описанной около основания параллелепипеда, равен $3\sqrt{2}$ см, а боковое ребро в два раза больше стороны основания.



а)



б)

Рис. 59

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед,
$DD_1 = 2AB$,
$AD = DC$,
$2R_{ABCD} = 3\sqrt{2}$ см.
Найти: площадь боковой грани.

Решение.

Каждая грань прямоугольного параллелепипеда является прямоугольником. Так как основания параллелепипеда — квадраты, то боковые грани — равные прямоугольники. Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон, следовательно, достаточно вычислить, например, длины отрезков DC и DD_1, тогда площадь грани $S_{DD_1C_1C} = DC \cdot DD_1$ (рис. 59, *а*).

1) Диагональ квадрата, вписанного в окружность, равна диаметру окружности, значит, $AC = 3\sqrt{2}$ см (рис. 59, *б*).

2) В равнобедренном прямоугольном треугольнике ADC имеем $AC^2 = 2DC^2$, $18 = 2DC^2$. Значит, $DC = 3$ см.

3) По условию боковое ребро параллелепипеда в два раза больше стороны основания. Значит, $DD_1 = 2DC = 6$ см.

4) Теперь вычислим площадь боковой грани $S_{DD_1C_1C} = DC \cdot DD_1 = 6 \cdot 3 = 18$ (см^2).

Ответ: 18 см^2.

Вопросы к § 5

1. Какая окружность называется вписанной в четырехугольник?

2. Какой четырехугольник называется описанным около окружности?

3. Каким свойством обладают стороны четырехугольника, в который можно вписать окружность?

4. Каким свойством должны обладать стороны четырехугольника, чтобы в него можно было вписать окружность?

5. Какая окружность называется описанной около четырехугольника?

6. Какой четырехугольник называется вписанным в окружность?

7. Каким свойством обладают углы четырехугольника, вписанного в окружность?

8. Какому условию должны удовлетворять углы четырехугольника, чтобы около него можно было описать окружность?

Задачи к § 5

145. Квадрат $ABCD$ описан около окружности, центром которой является точка O (рис. 60, *а*). Вычислите площадь треугольника COB, если радиус окружности равен 2 см.

146. Длина диагонали квадрата равна $4\sqrt{2}$ см. Вычислите радиус окружности, вписанной в квадрат.

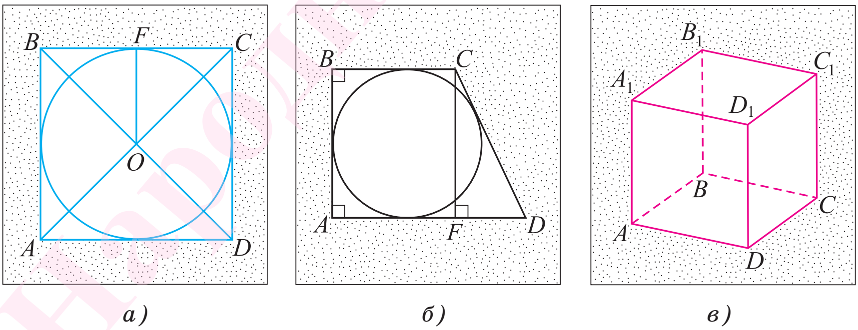


Рис. 60

147. Прямоугольная трапеция $ABCD$ описана около окружности. Вычислите длину большей боковой стороны, если радиус окружности равен 4 см, а градусная мера острого угла трапеции равна 60° (рис. 60, *б*).

148. Окружность вписана в прямоугольную трапецию, градусная мера одного из углов которой равна 30°, а длина большей боковой стороны равна 8 см. Вычислите периметр трапеции.

149. В прямоугольную трапецию $ABCD$, градусная мера острого угла которой равна 45°, вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник CDF, где отрезок CF — высота трапеции.

150. Площадь всех граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 24 см^2 (рис. 60, *в*). Вычислите радиус окружности, вписанной в грань куба.

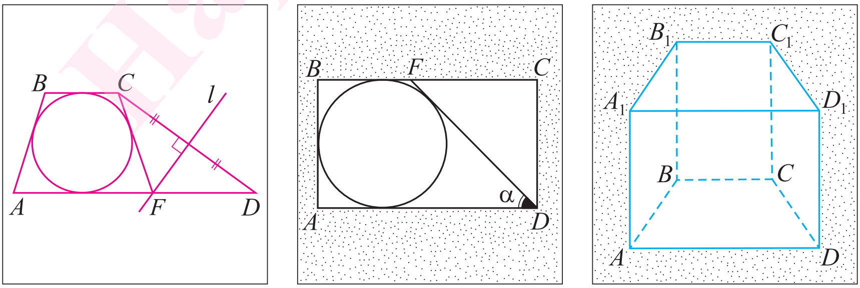
151. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD описана около окружности. Вычислите периметр трапеции, если $AB = 5$ см.

152. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 12 см. Вычислите длину боковой стороны трапеции.

153. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Вычислите длину средней линии трапеции, если длина боковой стороны трапеции равна 4 см.

154. Вычислите периметр трапеции, описанной около окружности, если длина ее средней линии равна 10 см.

155. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен 40 см. Вычислите высоту трапеции, если градусная мера острого угла трапеции равна 30°.



а) *б)* *в)*

Рис. 61

156. Серединный перпендикуляр l к боковой стороне CD трапеции $ABCD$ пересекает ее основание AD в точке F (рис. 61, *а*). Вычислите длину отрезка FD, если известно, что в равнобедренную трапецию $ABCF$ с периметром 24 см можно вписать окружность.

157. Точка F лежит на стороне BC прямоугольника $ABCD$ так, что в четырехугольник $ABFD$ можно вписать окружность (рис. 61, *б*). Вычислите периметр трапеции $ABFD$, если $AB = a$ и $\angle ADF = \alpha$.

158. Длина бокового ребра прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 10 см. Основанием призмы служит равнобедренная трапеция $ABCD$, длина боковой стороны которой равна 2 см (рис. 61, *в*). Вычислите сумму площадей всех боковых граней призмы, если известно, что в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность.

159. Сумма длин двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна a. Найдите периметр четырехугольника.

160. Равнобедренная трапеция описана около окружности. Найдите длину боковой стороны трапеции, если ее периметр равен m.

161. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то он является ромбом.

162. Около окружности описан ромб, длина стороны которого равна 5 см, а длина одной из диагоналей равна 8 см. Вычислите радиус окружности.

163. Диагональ ромба равна его стороне. Вычислите периметр ромба, если радиус вписанной в него окружности равен $\sqrt{3}$ см.

164. Около окружности описана равнобедренная трапеция, длина боковой стороны равна 6 см, а градусная мера угла при основании трапеции равна 150°. Вычислите площадь трапеции.

165. Около окружности радиуса 2 см описана равнобедренная трапеция, градусная мера острого угла которой равна 30°. Вычислите площадь трапеции.

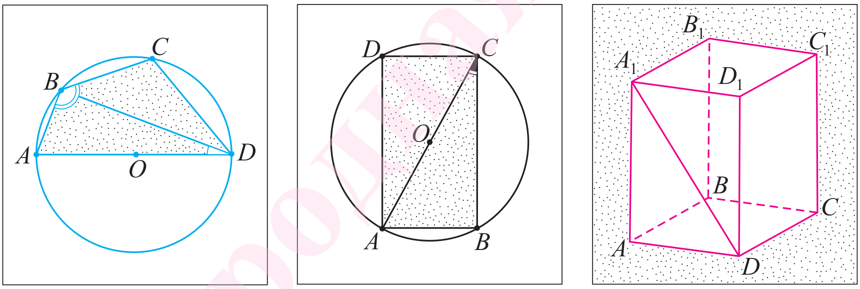
166. Около окружности радиуса 6 см описана трапеция. Вычислите площадь трапеции, если ее периметр равен 50 см.

167. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна $8\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину боковой стороны трапеции, если градусная мера одного из углов трапеции равна $60°$.

168. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 8 см^2, а градусная мера острого угла трапеции равна $30°$. Вычислите радиус вписанной окружности.

169. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Центр O окружности лежит на стороне AD. Вычислите градусные меры углов BCD и BDC, если $\angle ABC = 140°$, $\angle ADB = 20°$ (рис. 62, *а*).

170. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Сторона AD является диаметром этой окружности. Вычислите градусную меру угла CBD, если $\angle ADC = 48°$.



а) *б)* *в)*

Рис. 62

171. В окружность с центром в точке O вписан прямоугольник $ABCD$ (рис. 62, *б*). а) Верно ли, что точка O является серединой диагонали AC? б) Вычислите периметр прямоугольника, если радиус описанной окружности равен 2 см, а диагональ прямоугольника образует со стороной угол, градусная мера которого равна $30°$.

172. Периметр прямоугольника равен 12 см, а длины его сторон относятся как $1:2$. Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

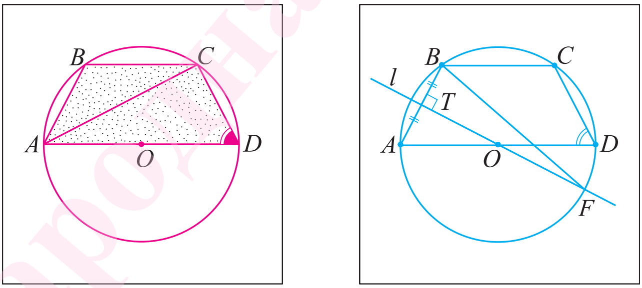
173. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат, площадь которого равна 49 см^2 (рис. 62, *в*). Вычислите диаметр окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, если длина бокового ребра равна $\sqrt{15}$ см.

174. Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольника, если его площадь равна 8 см^2, а длина одной из сторон равна 2 см.

175. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм является прямоугольником.

176. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция является равнобедренной.

177. Окружность радиуса 4 см описана около трапеции $ABCD$, а ее центр лежит на основании AD трапеции. Вычислите длину диагонали трапеции, если $\angle ADC = 60°$ (рис. 63, *а*).



а) *б)*

Рис. 63

178. Около трапеции, высота которой равна 4 см, описана окружность. Вычислите радиус окружности, если известно, что основание трапеции является диаметром окружности, а градусная мера одного из углов трапеции равна 120°.

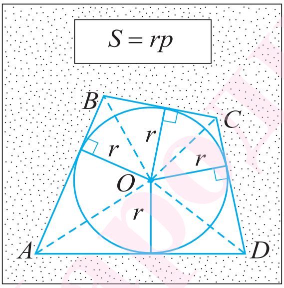
179. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на одном из оснований трапеции. Вычислите периметр трапеции, если градусная мера одного из ее углов равна 60°, а радиус окружности равен 6 см.

180. Основание трапеции $ABCD$ является диаметром описанной около нее окружности. Серединный перпендикуляр l к боковой стороне AB пересекает окружность в точке F. Вычислите расстояние от вершины B до точки F, если $\angle ADC = 60°$, а радиус окружности равен 2 см (рис. 63, *б*).

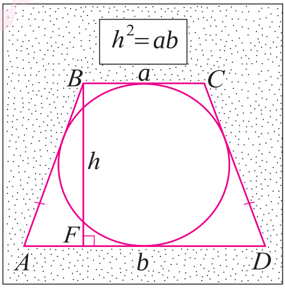
181. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Вычислите радиус окружности, описанной около трапеции, если длина ее диагонали равна 12 см, а длина боковой стороны равна 9 см.

182. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, градусная мера одного из ее углов равна 60°. Вычислите площадь трапеции, если радиус описанной около нее окружности равен 4 см.

183. Докажите, что площадь описанного четырехугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности: $S = rp$, где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ (рис. 64, *а*).



а)



б)

Рис. 64

184. Докажите, что квадрат высоты равнобедренной трапеции $ABCD$, в которую можно вписать окружность, равен произведению длин оснований BC и AD трапеции: $h^2 = ab$, где $BC = a$ и $AD = b$, h — ее высота (рис. 64, *б*).

185. Сумма длин двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна a, а радиус вписанной окружности равен b. Найдите площадь четырехугольника.

186. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если длина ее большего основания равна a, а градусная мера одного из углов равна 120°.

187. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки, длины которых равны p и q. Найдите площадь трапеции.

188. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки, длины которых равны a и b. Докажите, что радиус вписанной окружности можно найти по формуле $r = \sqrt{ab}$.

189. Прямоугольник, длины сторон которого равны 6 см и 8 см, разделен диагональю на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Вычислите расстояние между центрами окружностей.

190. Длины сторон AB и BC прямоугольника равны 12 см и 6 см соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в точках K и T. Вычислите расстояние между точками K и T.

191. В ромб вписана окружность радиуса r. Найдите площадь ромба, если его большая диагональ в четыре раза больше радиуса вписанной окружности.

192. В ромб, градусная мера одного из углов которого равна 60°, вписана окружность. Расстояние между точками касания смежных сторон и окружности равно $2a$. Найдите площадь ромба.

193. В квадрат вписана окружность. Другая окружность касается двух сторон квадрата и касается внешним образом вписанной в него окружности. Найдите радиус меньшей окружности, если длина стороны квадрата равна a.

194. Длины боковых сторон трапеции равны 3 см и 5 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5 : 11. Вычислите длины оснований трапеции.

195. Вычислите площадь трапеции по разности длин оснований, равной 14 см, и длинам непараллельных сторон, равных 13 см и 15 см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

196. Около окружности описана трапеция, длины боковых сторон которой равны 13 см и 15 см, а площадь равна 168 см^2. Вычислите длины оснований трапеции.

197. Около окружности описана равнобедренная трапеция, длина средней линии которой равна 5 см, а синус острого угла при основании 0,8. Вычислите площадь трапеции.

198. Высоты BF и CT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке S. Верно ли, что около четырехугольника $ATSF$ можно описать окружность?

199. Отрезки AF и BT — соответственно высота и медиана остроугольного равнобедренного треугольника ABC, основанием которого является отрезок AC, $O = BT \cap AF$. Докажите, что около четырехугольника $TOFC$ можно описать окружность.

200*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CK. Вычислите радиус окружности, описанной около четырехугольника $AKEC$, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15 см, периметр треугольника BEK равен 9 см, а радиус окружности, описанной около треугольника BEK, равен 1,8 см.

2

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Глава 2

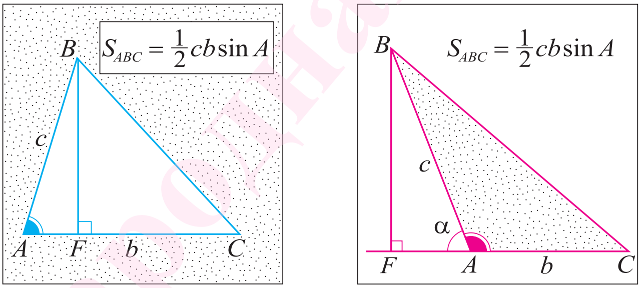
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 1. Теорема синусов

В этом параграфе докажем теорему синусов, которая позволяет находить длины неизвестных сторон треугольника, если известна длина одной стороны и градусные меры двух углов, а также вычислять градусные меры углов, если известны длины двух сторон и градусная мера угла, лежащего против одной из этих сторон.

Предварительно докажем следующую теорему, которая позволяет находить площадь треугольника, если известны длины двух его сторон и градусная мера угла между ними. Данная теорема может быть применена при решении многих задач.

Теорема 1 (*о нахождении площади треугольника через длины двух сторон и синус угла между ними*). ***Площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними.***



а) *б)*

Рис. 65

Доказательство.

Пусть в треугольнике ABC известны градусная мера угла A и $AB = c$, $AC = b$. Докажем, что площадь данного треугольника можно найти по формуле $S_{ABC} = \frac{1}{2}cb\sin A$. Возможны три случая: 1) угол A — острый; 2) угол A — тупой; 3) угол A — прямой.

1) Пусть угол A — острый (рис. 65, *а*), а отрезок BF — высота треугольника. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}bBF$.

В прямоугольном треугольнике ABF длина катета $BF = c \sin A$. Таким образом, $S_{ABC} = \frac{1}{2} cb \sin A$.

2) Пусть угол A — тупой (рис. 65, *б*). $S_{ABC} = \frac{1}{2} bBF$. В прямоугольном треугольнике ABF длина катета $BF = c \sin \alpha$, где $\alpha = 180° - \angle A$. Так как $\sin \alpha = \sin(180° - \angle A) = \sin A$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} cb \sin A$. Таким образом, в каждом из случаев 1) и 2) площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними.

3) Если $\angle A = 90°$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} cb \sin 90° = \frac{1}{2} cb$.

Теорема доказана.

Воспользуемся утверждением этой теоремы для доказательства теоремы синусов.

Теорема 2 (*теорема синусов*). ***Длины сторон треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

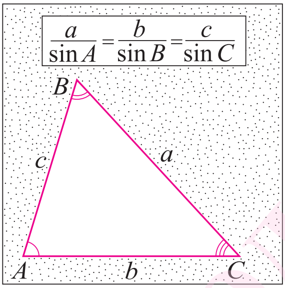


Рис. 66

Доказательство.

1) Пусть ABC — произвольный треугольник, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (рис. 66). Докажем, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

На основании предыдущей теоремы можем записать следующие равенства: $S_{ABC} = \frac{1}{2} cb \sin A$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$.

2) Отсюда следует, что выполняются равенства:

$$\frac{1}{2} cb \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B \quad (1) \text{ и } \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \quad (2).$$

3) Из равенства (1) следует, что $b \sin A = a \sin B$. Отсюда

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad (3).$$

4) Из равенства (2) следует, что $c \sin B = b \sin C$. Отсюда получим, что

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad (4).$$

Из равенств (3) и (4) следует, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорема доказана.

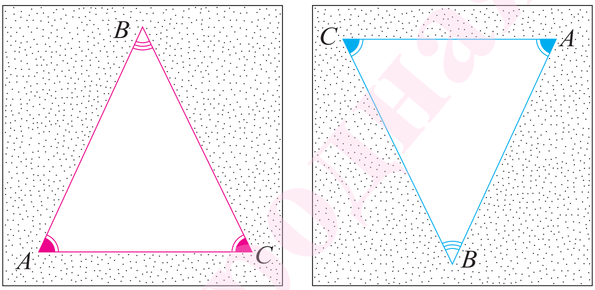
В силу результата задачи **2** § 4 первой главы выполняется равенство $\frac{a}{\sin A} = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Учитывая это равенство и утверждение теоремы синусов, получим *следствие*: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Так как площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{1}{2}cb\sin A$ и $\sin A = \frac{a}{2R}$, то отсюда следует, что $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$.

Полученная формула позволяет находить площадь треугольника, зная длины его сторон и радиус описанной окружности, или радиус окружности, описанной около треугольника, если известны длины сторон и площадь треугольника.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач.

Задача 1. Найдите площадь равнобедренного треугольника ABC, если длина его боковой стороны равна 10 см, а градусная мера угла при вершине основания равна 75°.



а)   б)

Рис. 67

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = 10$ см, $\angle BAC = 75°$ (рис. 67, *а*, *б*).

Найти: S_{ABC}.

Решение.

Воспользуемся теоремой о нахождении площади треугольника через длины двух его сторон и синус угла между ними.

1) На основании теоремы **1** площадь треугольника можем найти по формуле $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin B = \frac{1}{2}AB^2\sin B$.

2) Сумма градусных мер углов треугольника равна 180°, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно, $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$.

3) Таким образом, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 \sin B = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = 25$ (см^2).

Ответ: 25 см^2.

Задача 2. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 4 см, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 70^\circ$. Вычислите длины сторон AB и BC (рис. 68).

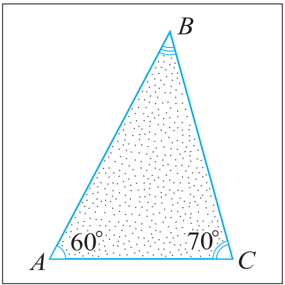


Рис. 68

Решение.

Для вычисления длин сторон воспользуемся теоремой синусов.

1) Пусть $AB = x$ и $BC = y$. Тогда по теореме синусов $\frac{x}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$. Отсюда получим $x = \frac{AC \sin C}{\sin B} = \frac{AC \sin 70^\circ}{\sin B}$.

Сумма градусных мер углов треугольника равна 180°, следовательно, $\angle B = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ$. По таблице значений тригонометрических функций (см. Приложение) найдем $\sin 70^\circ \approx 0{,}9397$, $\sin 50^\circ \approx 0{,}7660$. Таким образом, $x \approx \frac{4 \cdot 0{,}9397}{0{,}7660} \approx 3{,}96$.

2) Длину стороны BC также вычислим по теореме синусов: $\frac{y}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Отсюда найдем $y = \frac{AC \sin A}{\sin B} = \frac{AC \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \frac{4 \cdot 0{,}8660}{0{,}7660} \approx 4{,}09$ (см).

Ответ: $AB \approx 3{,}96$ см; $BC \approx 4{,}09$ см.

Задача 3. В треугольнике ABC градусная мера угла B равна 40°, а длины сторон BC и AC равны 8 см и 6 см соответственно. Вычислите градусные меры углов A, C и длину стороны AB.

Решение.

По теореме синусов выполняется равенство $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$. Отсюда следует, что $\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{8 \sin 40^\circ}{6}$. По таблице значений тригонометрических функций (см. Приложение) найдем $\sin 40^\circ \approx 0{,}6428$. Следовательно, $\sin A \approx \frac{8 \cdot 0{,}6428}{6} \approx 0{,}8570$.

Этому значению синуса соответствуют два угла: $\angle A_1 \approx 59°$ и $\angle A_2 \approx 121°$ ($\sin 59° = \sin(180° - 121°) = \sin 121°$).

1) В случае $\angle A_1 \approx 59°$ найдем $\angle C_1 = 180° - \angle B - \angle A_1 \approx 81°$. Теперь найдем длину стороны AB: $\frac{AB}{\sin C_1} = \frac{BC}{\sin A}$, $AB = \frac{BC \sin C_1}{\sin A} \approx$ $\approx \frac{6 \cdot 0{,}9877}{0{,}8570} \approx 5{,}85$ (см).

2) Если $\angle A_2 \approx 121°$, то $\angle C_2 = 180° - \angle B - \angle A_2 \approx 19°$. В этом случае $AB = \frac{BC \sin C_2}{\sin A} \approx \frac{6 \sin 19°}{0{,}8570} \approx \frac{6 \cdot 0{,}3256}{0{,}8570} \approx 6{,}62$ (см).

Ответ: $\angle A \approx 59°$, $\angle C \approx 81°$, $AB \approx 5{,}85$ см или $\angle A \approx 121°$, $\angle C \approx 19°$, $AB \approx 6{,}62$ см.

Вопросы к § 1

1. Каким образом можно вычислить площадь треугольника, если известны длины двух его сторон и градусная мера угла между этими сторонами?

2. Сформулируйте теорему синусов.

3. Можно ли вычислить длину стороны треугольника, если известны радиус окружности, описанной около треугольника, и градусная мера угла, противолежащего данной стороне?

Задачи к § 1

201. Вычислите площадь треугольника ABC, если $AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 60°$.

202. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 8 см, а градусная мера угла при основании равна 15°. Вычислите площадь треугольника.

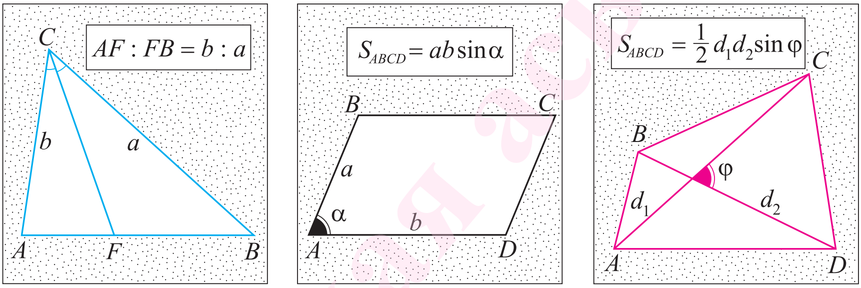
203. В равнобедренном треугольнике градусная мера угла при основании равна α, а высота, проведенная к боковой стороне, равна h. Найдите площадь треугольника.

204. Вычислите площадь треугольника ABC, если $\angle A = 60°$, а высоты, проведенные из вершин B и C, равны соответственно $\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{3}$ см.

205. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см, а градусная мера угла при основании равна $22°30'$. Верно ли, что площадь треугольника равна $15\sqrt{2}$ см^2?

206. Вычислите площадь треугольника ABC, если $\angle B = 105°$, $\angle C = 30°$, а высота, проведенная из вершины B, равна 2 см.

207. Отрезок CF — биссектриса треугольника ABC, $AC = b$, $BC = a$. Воспользовавшись теоремой **1** данного параграфа, докажите, что $AF : FB = b : a$ (рис. 69, *а*).



а) *б)* *в)*

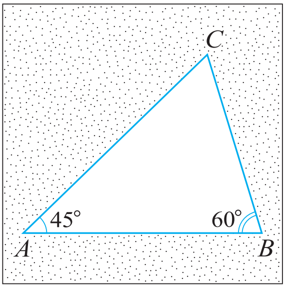
Рис. 69

208. Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению длин a и b его смежных сторон на синус угла α между ними, т. е. $S_{ABCD} = ab\sin\alpha$ (рис. 69, *б*).

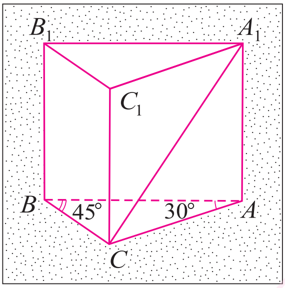
209. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна половине произведения длин d_1 и d_2 его диагоналей на синус угла φ между ними, т. е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$ (рис. 69, *в*).

210. Длина стороны AC треугольника ABC равна 6 см. Вычислите длину стороны BC, если $\angle B = 60°$ и $\angle A = 45°$ (рис. 70, *а*).

211. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, у которого $\angle B = 45°$, $\angle A = 30°$ и $BC = 2$ см. Вычислите длину диагонали грани CC_1A_1A, если $AC = AA_1$ (рис. 70, *б*).



а)



б)

Рис. 70

212. Длины сторон AB и BC треугольника ABC равны соответственно $\sqrt{2}$ см и $\sqrt{3}$ см. Вычислите градусную меру угла A, если $\angle C = 45°$.

213. Точка F лежит на стороне AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle BAC = 90°$) так, что $\angle AFC = \beta$ и $\angle FCB = \alpha$. Найдите длину отрезка FB, если $AC = a$.

214. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 6 см, $\angle B = 95°$, $\angle A = 55°$. Вычислите длины сторон BC и AC.

215. Отрезок AF — биссектриса равнобедренного треугольника ABC, основанием которого является отрезок AC. Вычислите длину этой биссектрисы, если $AC = 10$ см, $\angle ABC = 100°$.

216. Вычислите длину стороны AC треугольника ABC, если $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 45°$ и $\angle C = 15°$.

217. В треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны соответственно 5 см и 6 см, а $\angle C = 25°$. Вычислите градусную меру угла A, если известно, что этот угол острый.

218. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагональ AC расположена на биссектрисе угла A. Вычислите длину диагонали AC, если $AC = CD$, $AD = 12$ см, $\angle ABC = 150°$.

219. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса острого угла A пересекает сторону BC в точке F. Вычислите длину отрезка AF, если $\angle BCD = 30°$ и $DC = 6$ см.

220. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = \alpha$, $CD = b$. Точка F лежит на стороне AD так, что $\angle BFD : \angle A = 2 : 1$. Найдите длину отрезка BF.

221. В параллелограмме $ABCD$ градусная мера угла A равна $60°$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке F. Вычислите площадь треугольника ABF, если $BF = 5$ см.

222. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC градусная мера угла при вершине B равна α. Найдите длину биссектрисы CT этого треугольника, если $AC = a$.

223. Отрезок BF — биссектриса равнобедренного треугольника ABC, основанием которого является отрезок BC. Найдите длину отрезка BF, если $\angle B = \beta$, $BC = m$.

224. Диагональ BD прямоугольника $ABCD$ образует со стороной AB угол, градусная мера которого равна $15°$. Биссектриса угла A пересекает диагональ BD в точке F. Вычислите длину отрезка BF, если $CD = 2\sqrt{3}$ см.

225. В треугольнике ABC длина стороны AC равна a, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите площадь треугольника.

226. Градусная мера одного из углов треугольника равна $60°$, а радиус описанной окружности равен $4\sqrt{3}$ см. Вычислите длину стороны, лежащей против данного угла.

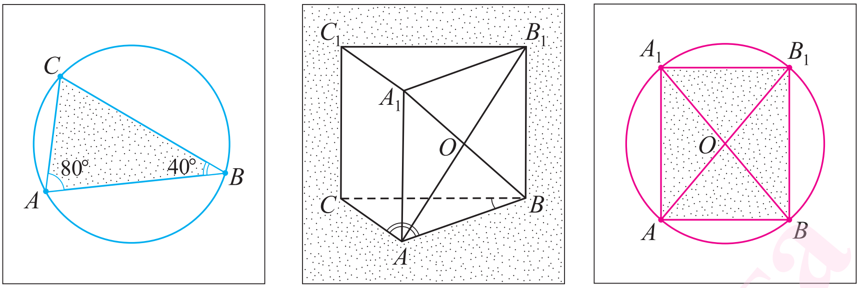
227. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle ABC = 30°$ и $AC = 6$ см.

228. В треугольнике ABC градусные меры углов A и C равны соответственно $45°$ и $30°$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника, если высота, проведенная из вершины B, равна 4 см.

229. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle A = 40°$ и $\angle C = 20°$.

230. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\sqrt{3}$ см. Вычислите длину стороны AC, если $\angle A = 40°$, $\angle C = 80°$.

231. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, у которого $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$, а радиус описанной около него окружности равен $4\sqrt{3}$ см. Вычислите радиус окружности, описанной около грани AA_1B_1B, если площадь этой грани равна 60 см^2 (рис. 71, *а*, *б*, *в*).



а) б) в)

Рис. 71

232. Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 12 см, $AB = 2$ см и $\angle ABC = 30°$.

233. Вычислите площадь прямоугольника, длина диагонали которого равна 4 см, а градусная мера угла между диагоналями равна 30°.

234. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\angle CAB = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ и $AC = m$.

235. Вычислите площадь треугольника, длина одной стороны которого равна 4 см, а градусные меры прилежащих к ней углов равны 30° и 45°.

236. В треугольнике длины двух сторон равны 15 см и $6\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь треугольника, если высоты, проведенные к этим сторонам, пересекаются под углом, градусная мера которого равна 60°.

237. В остроугольном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны соответственно 10 см и 18 см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если высота, проведенная из вершины B, равна 6 см.

238. Высота BD, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC, равна m, а $\angle ABC = 30°$. Через середину высоты BD проведена прямая, пересекающая боковые стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $\angle BEF = 60°$.

239. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 10 см. Отрезок BD — высота треугольника, $AB = 10$ см и $AD = 6$ см. Вычислите длину стороны BC.

240. Отрезок BF — медиана треугольника ABC, $\angle ABC = 75°$, $\angle CBF = 45°$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABF, если радиус окружности, описанной около треугольника CBF, равен $2\sqrt{2}$ см.

241. В треугольнике ABC градусные меры углов A и C равны соответственно α и γ, отрезок AD — биссектриса треугольника. Найдите отношение площадей треугольников ABD и ADC.

242. Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если $AD = a$, $\angle BCA = \varphi$ и $\angle CDA = \alpha$.

243. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle B = \beta$, $\angle A = \alpha$, а высота BF равна h.

244. Длина стороны BC треугольника ABC равна a, а $\angle A = \alpha$. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O.

245. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 15$ см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если сумма площадей боковых граней призмы равна 216 см^2, а длина бокового ребра равна 4 см.

246. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle CAB = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$.

247*. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AC равна a, отрезок CM — биссектриса треугольника, $MK \parallel AC$, $K \in BC$. Найдите площадь треугольника KBM, если $\angle BCA = \alpha$.

§ 2. Теорема косинусов. Решение треугольников

1. Теорема косинусов. В данном параграфе докажем теорему, которая связывает длины трех сторон треугольника и косинус одного из его углов. Эта теорема называется теоремой косинусов и формулируется следующим образом.

Теорема 1 (*теорема косинусов*). ***Квадрат длины любой стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других его сторон без удвоенного произведения длин этих сторон на косинус угла между ними.***

Доказательство.

1) Пусть отрезок CH — высота треугольника ABC, угол A — острый, $AC = b$, $CB = a$, $AB = c$ (рис. 72).

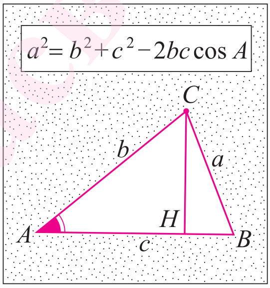


Рис. 72

2) В прямоугольном треугольнике ACH найдем $CH = b\sin A$, $AH = b\cos A$, $BH = c - b\cos A$.

3) Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника CBH: $CB^2 = CH^2 + BH^2$, или $a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$. Отсюда получим $a^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$, или $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, так как $b^2\sin^2 A + b^2\cos^2 A = b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) = b^2 \cdot 1 = b^2$.

Нетрудно доказать, что формула верна и в случае, когда угол A — тупой. В этом случае проведите доказательство самостоятельно.

Если угол A — прямой, то теорема косинусов представляет собой теорему Пифагора $a^2 = b^2 + c^2$, так как в этом случае $\cos A = \cos 90° = 0$.

Теорема доказана.

Аналогично квадраты длин сторон b и c выражаются соответственно формулами $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

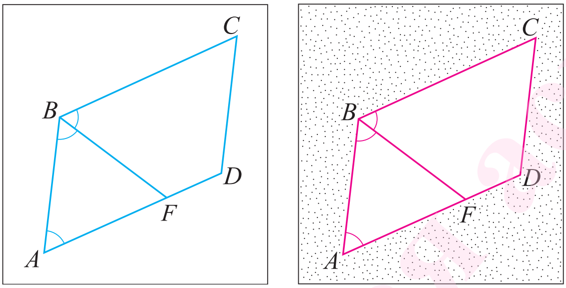
Задача 1. В треугольнике ABC $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см. Докажите, что градусная мера угла, лежащего против стороны BC, равна $60°$.

Доказательство.

По теореме косинусов верно равенство $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$. Следовательно, $49 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos A$. Отсюда найдем $\cos A = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle A = 60°$.

Что и требовалось доказать.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle ABC = 120°$. Биссектриса угла B пересекает сторону AD параллелограмма в точке F, $AF = 3$ см и $FD = 2$ см. Вычислите длину отрезка BF и длину диагонали AC параллелограмма.



а) б)

Рис. 73

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $\angle ABC = 120°$, BF — биссектриса, $AF = 3$ см, $FD = 2$ см (рис. 73, *а*, *б*).

Найти: BF и AC.

Решение.

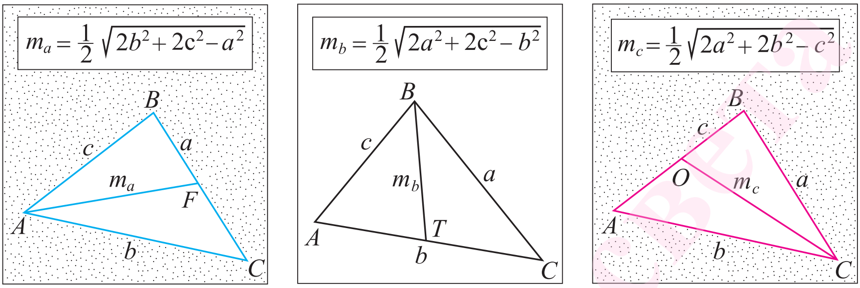
1) Рассмотрим треугольник ABF. Так как BF — биссектриса угла ABC и $\angle ABC = 120°$, то $\angle ABF = 60°$. Сумма градусных мер углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна $180°$, следовательно, $\angle BAF = 60°$. Так как сумма градусных мер углов треугольника равна $180°$, то $\angle AFB = 180° - 120° = 60°$. Таким образом, в треугольнике ABF градусная мера каждого угла равна $60°$, т. е. этот треугольник — равносторонний и $BF = AF = AB = 3$ см.

2) Для вычисления длины диагонали AC воспользуемся теоремой косинусов. В треугольнике ABC по теореме косинусов запишем $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120°$. Так как $BC = AD = AF + FD = 5$ см, то $AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120°$. Так как $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, то отсюда найдем $AC = 7$ см.

Ответ: $BF = 3$ см, $AC = 7$ см.

Теорема косинусов позволяет доказать ряд утверждений, которые полезны при решении многих задач. Докажем некоторые из таких утверждений.

Задача 3. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника ABC, то длины его медиан m_a, m_b и m_c могут быть найдены по формулам $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.



а) *б)* *в)*

Рис. 74

Доказательство.

Докажем, например, первую формулу. Пусть отрезок AF — медиана треугольника ABC, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 74, *а*).

Применим теорему косинусов для треугольника ABF, в котором $AB = c$, $BF = \frac{1}{2}a$, $AF = m_a$. Можем записать $m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c \cdot \frac{a}{2}\cos B$. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Таким образом, получим $m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. Отсюда следует, что $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. Доказательство двух других формул проведите самостоятельно (рис. 74, *б*, *в*). Заметим, что при доказательстве указанных формул можно воспользоваться следующей задачей.

Задача 4. Пусть d_1 и d_2 — длины диагоналей параллелограмма, a и b — длины его сторон. Докажите, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон, т. е. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

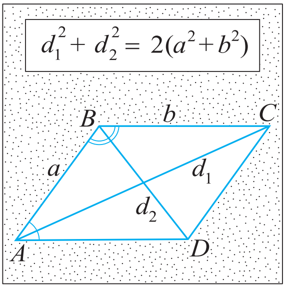


Рис. 75

Доказательство.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB=a$, $BC=b$, $\angle BAD=\alpha$, $AC=d_1$ и $BD=d_2$ (рис. 75).

По теореме косинусов для треугольника ABD справедливо равенство $d_2^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ (1).

Для треугольника ABC по теореме косинусов $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha)$. Так как $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, то $d_1^2 = a^2+b^2+2ab\cos\alpha$ (2). Сложив равенства (1) и (2) почленно, получим $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$. Что и требовалось доказать.

Задача 5. Докажите, что площадь любого треугольника можно найти по формуле $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*), где a, b и c — длины сторон треугольника, а $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — его полупериметр (рис. 76).

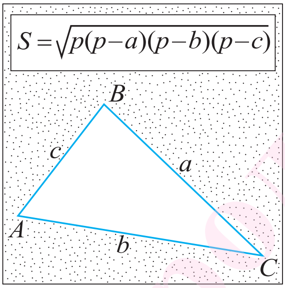


Рис. 76

Доказательство.

Пусть в треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

По теореме косинусов верно равенство: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$. Отсюда $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (1).

Так как площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$, то $2S=bc\sin A$ или $4S=2bc\sin A$. Отсюда $\sin A=\dfrac{4S}{2bc}$ (2).

Учитывая равенства (1) и (2) и равенство $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, получим $\left(\dfrac{4S}{2bc}\right)^2+\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=1$. Отсюда $16S^2=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$.

Используя формулу разности квадратов двух выражений, преобразуем правую часть полученного равенства следующим образом:

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)=$$
$$=\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)=$$
$$=(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)=$$
$$=2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)=16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Значит,

$$16S^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c),$$

следовательно,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 6. В треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$. Найдите радиус r полукруга, вписанного в данный треугольник, если центр O полукруга принадлежит стороне AB (рис. 77, *а*).

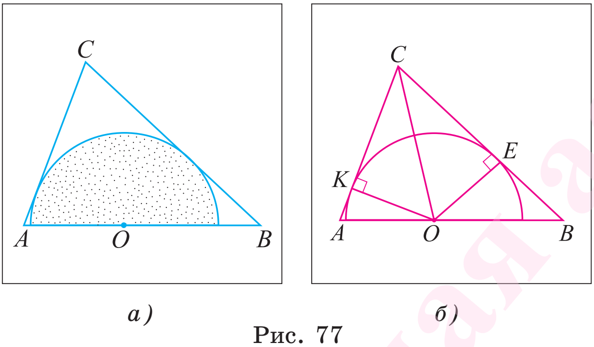


Рис. 77

Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, O — центр вписанного полукруга.
Найти: r.

Решение.

1) Пусть полукруг касается сторон AC и CB в точках K и E соответственно. Соединим центр O с точками K, C и E (рис. 77, *б*).

2) Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, значит, отрезки OK и OE являются высотами треугольников AOC и BOC соответственно. Площадь S_{ABC} треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOC и BOC. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot OK + \frac{1}{2}BC \cdot OE = \frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r =$$
$$= \frac{r}{2}(AC + BC) = \frac{r}{2}(a+b).$$

Отсюда получим $r = \dfrac{2S_{ABC}}{a+b}$.

3) По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Таким образом, $r = \dfrac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ответ: $r = \dfrac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

2. Решение треугольников. Решить треугольник — значит по трем его элементам найти другие его элементы. Приведем примеры задач на решение треугольника.

Задача 7 (*нахождение элементов треугольника по длинам двух сторон и градусной мере угла между ними*). Известны длины a и b двух сторон BC и AC треугольника и градусная мера α угла между ними. Найдите неизвестные элементы треугольника (рис. 78).

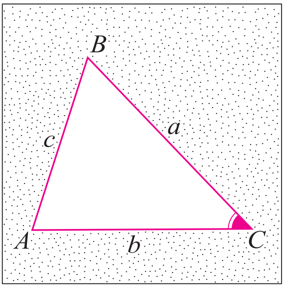


Рис. 78

Решение.

1) В треугольнике ABC $\angle C = \alpha$, $BC = a$ и $AC = b$. По теореме косинусов найдем $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

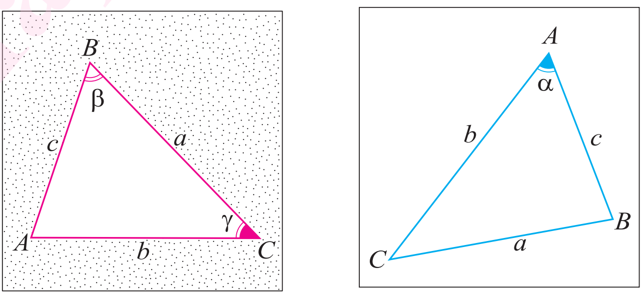
2) По теореме синусов запишем $\frac{a}{\sin A} = \frac{AB}{\sin\alpha}$.

Отсюда найдем $\sin A = \frac{a\sin\alpha}{AB}$.

3) Зная $\sin A$, найдем градусную меру угла A, а затем найдем $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.

Ответ: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, $\sin A = \frac{a\sin\alpha}{c}$, $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.

Задача 8 (*нахождение элементов треугольника по длине стороны и градусным мерам двух прилежащих к ней углов*). Известны длина a стороны BC треугольника ABC и градусные меры γ и β двух прилежащих к ней углов. Найдите неизвестные элементы треугольника.



а) *б)*

Рис. 79

Р е ш е н и е.

1) В треугольнике ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, тогда $\angle A = 180° - (\beta + \gamma)$ (рис. 79, *а*).

2) По теореме синусов имеет место равенство $\frac{a}{\sin A} = \frac{AC}{\sin\beta}$. Отсюда найдем $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin A}$.

3) Аналогично по теореме синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{AB}{\sin\gamma}$. Отсюда $AB = \frac{a\sin\gamma}{\sin A}$.

О т в е т: $\angle A = 180° - (\beta + \gamma)$, $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin A}$, $AB = \frac{a\sin\gamma}{\sin A}$.

Задача 9 (*нахождение элементов треугольника по длинам двух сторон и градусной мере угла, противолежащего одной из них*). Известны длины a и b соответственно сторон BC и AC треугольника ABC и градусная мера α угла, противолежащего стороне BC. Найдите неизвестные элементы треугольника.

1) В треугольнике ABC $BC = a$, $AC = b$ и $\angle A = \alpha$ (рис. 79, *б*). Найдем синус угла B. По теореме синусов $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Отсюда найдем $\sin B = \frac{b\sin\alpha}{a}$. Если $\sin B \leqslant 1$, то задача имеет решение, если $\sin B > 1$, то задача не имеет решения. Возможно, что задаче удовлетворяет два значения угла, т. е. задача имеет два решения.

2) Теперь можем найти $\angle C = 180° - (\angle B + \angle A)$.

3) Найдем длину стороны AB. По теореме синусов $\frac{AB}{\sin C} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Отсюда найдем $AB = \frac{b\sin C}{\sin\alpha}$.

О т в е т: $\sin B = \frac{b\sin\alpha}{a}$, $\angle C = 180° - (\angle B + \angle A)$, $AB = \frac{b\sin C}{\sin\alpha}$.

Задача 10 (*нахождение градусных мер углов треугольника по длинам трех сторон*). Известны длины a, b и c соответственно сторон BC, AC и AB треугольника ABC. Найдите неизвестные элементы треугольника.

1) В треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. По теореме косинусов найдем $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cb}$.

2) Синус угла B найдем по теореме синусов: $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$.

3) Теперь найдем $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

О т в е т: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cb}$, $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$, $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Задачи к § 2

248. В треугольнике длины двух сторон равны 3 см и 8 см, а градусная мера угла между этими сторонами равна $120°$. Вычислите длину третьей стороны треугольника.

249. Вычислите длину стороны треугольника, лежащей против угла, градусная мера которого $135°$, а длины двух других сторон равны $\sqrt{2}$ см и 5 см.

250. В треугольнике ABC градусная мера угла B равна $60°$, $AB = 2$ см, $AC = \sqrt{7}$ см. Вычислите длину стороны BC.

251. Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 10 см, а градусная мера угла между этими сторонами равна $60°$. Вычислите периметр треугольника.

252. Длины сторон треугольника равны 3 см, 5 см и 7 см. Вычислите градусную меру угла треугольника, противолежащего большей стороне.

253. Длина одной из сторон треугольника равна 13 см, две другие образуют угол, градусная мера которого равна $120°$, а их длины относятся как $7 : 8$. Вычислите длины этих сторон.

254. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, если длины его сторон равны $3\sqrt{2}$ см и 7 см, а градусная мера одного из его углов равна $135°$.

255. Длина одной из сторон параллелограмма равна 2 см, а его площадь — 4 см^2. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма, если градусная мера одного из его углов равна $30°$.

256. Градусная мера угла параллелограмма равна $150°$, а длина одной из его сторон — $2\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь параллелограмма, если длина его большей диагонали равна $\sqrt{33}$ см.

257. Длины сторон треугольника равны 5 см, 12 см и 13 см. Вычислите высоту треугольника, проведенную к большей стороне.

258. Градусная мера угла параллелограмма равна $45°$, а длины сторон — 17 см и $7\sqrt{2}$ см. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма и его площадь.

259. Длины смежных сторон параллелограмма равны a и b, а градусная мера одного из его углов равна α. Найдите длины диагоналей параллелограмма.

260. Длины диагоналей параллелограмма равны d_1 и d_2, а градусная мера угла между диагоналями равна φ. Найдите длины сторон параллелограмма.

261. Градусная мера одного из углов параллелограмма равна $120°$. Биссектриса этого угла делит сторону параллелограмма на отрезки, длины которых 15 см и 10 см, считая от вершины острого угла. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма.

262. В равнобедренном треугольнике ABC градусная мера угла при вершине C равна $120°$, а длина основания $AB = 2\sqrt{15}$ см. Вычислите длину медианы AF.

263. В равнобедренном треугольнике ABC градусная мера угла при вершине B равна $120°$, длина медианы AT равна 7 см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

264. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне BC. Вычислите длину другой диагонали параллелограмма, если $\angle BAD = 60°$ и $BD = 4$ см.

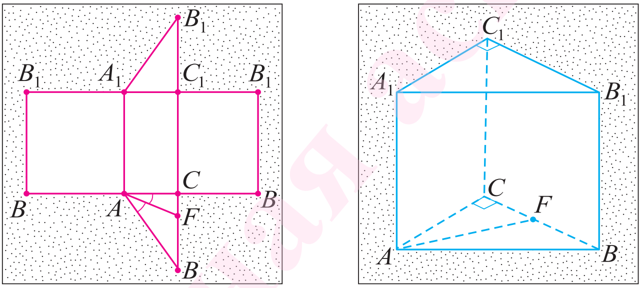
265. Градусная мера угла A параллелограмма $ABCD$ равна $60°$. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма, если высота, проведенная к стороне AD, равна $\sqrt{3}$ см и $AD = 1$ см.

266. Длины сторон треугольника равны 5 см, 7 см и 8 см. Вычислите градусную меру угла, лежащего против средней стороны треугольника, и радиус описанной около него окружности.

267. Периметр треугольника равен 15 см, а длина одной из его сторон равна 7 см. Вычислите градусную меру угла, противолежащего данной стороне, если биссектриса треугольника делит ее в отношении $3:5$.

268. В остроугольном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны соответственно $\sqrt{3}$ см и 4 см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника, если его площадь равна $\sqrt{3}$ см^2.

269. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, а длина биссектрисы AF равна 4 см. Вычислите площадь грани AA_1B_1B, если радиус описанной около этой грани окружности равен 4 см (рис. 80, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 80

270. Вычислите площадь трапеции, если длины ее оснований равны 6 см и 7 см, а длины диагоналей равны 5 см и 12 см.

271. Градусная мера угла параллелограмма равна 60°, разность длин его смежных сторон равна 2 см, а длина большей диагонали равна 7 см. Вычислите длину меньшей диагонали и площадь параллелограмма.

272. Площадь параллелограмма, градусная мера угла которого 120°, равна $40\sqrt{3}$ см^2, а разность длин его смежных сторон равна 11 см. Вычислите длины диагоналей параллелограмма.

273. Решите треугольник ABC, если $AB = \sqrt{3}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$.

274. Найдите неизвестные элементы треугольника ABC, если $BC = 3\sqrt{2}$ см, $AC = 1$ см, $\angle C = 135°$.

275. Решите треугольник ABC, если $AB = 8\sqrt{2}$ см, $BC = 10$ см и $\angle A = 45°$.

276. Длина одной из сторон параллелограмма на 4 см больше длины другой. Вычислите периметр параллелограмма, если одна из его диагоналей образует со сторонами параллелограмма углы, градусные меры которых равны 30° и 45°.

277. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 2 : 3. Вычислите радиус окружности, если длина наименьшей стороны равна 8 см.

278. Длины сторон треугольника равны a, b и c, а длины его медиан, проведенных соответственно к этим сторонам, равны m_a, m_b и m_c. Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

279. В параллелограмме $ABCD$ длина диагонали BD больше длины боковой стороны AB на 8 см, а высота, проведенная из вершины B к стороне AD, делит ее на отрезки, длины которых равны 8 см и 20 см. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма.

280. Вычислите площадь параллелограмма, если длины его сторон равны 6 см и 4 см, а градусная мера угла между диагоналями равна 60°.

281. Вычислите длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если длины сторон AB и AD равны соответственно 13 см и 16 см, а длина медианы BF треугольника ABD равна 9 см.

282. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна диагонали BD. Около треугольника ABD описана окружность, которая делит большую диагональ параллелограмма на отрезки, длины которых равны 65 см и 16 см. Вычислите длины сторон параллелограмма.

283. Градусная мера острого угла параллелограмма равна α. Найдите площадь параллелограмма и длины его диагоналей, если m и n — расстояния от точки пересечения диагоналей до прямых, содержащих стороны параллелограмма.

284. Длины сторон треугольника равны 11 см, 12 см и 13 см. Вычислите длину медианы, проведенной к большей стороне.

285. Длина большей диагонали параллелограмма равна 14 см, а меньшая делится перпендикуляром, проведенным из вершины острого угла, на отрезки, длины которых равны 2 см и 6 см. Вычислите длины сторон параллелограмма.

286. Длины двух сторон треугольника равны 3 см и 5 см, а длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 3,5 см. Вычислите градусную меру угла треугольника между заданными сторонами.

287. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислите длины сторон треугольника, если одна из них делится точкой касания на отрезки, длины которых равны 3 см и 4 см.

288*. Параллелограмм $PTKE$ расположен так, что его вершины E и K лежат на стороне AC треугольника ABC, вершины P и T — на сторонах AB и BC соответственно, а диагонали параллельны сторонам. Вычислите длины сторон треугольника, если $EK = 3$ см, $PE = 5$ см, $PK = 6$ см.

Вопросы ко второй главе

1. Площадь треугольника ABC равна 3 см^2, а длины двух его сторон равны 2 см и 6 см. Верно ли, что градусная мера угла между данными сторонами равна $60°$?

2. Верно ли, что синус угла треугольника ABC можно найти по формуле $\sin\alpha = \frac{2S}{ab}$, где S — площадь треугольника, $AB = c$, $AC = b$, где α — градусная мера угла, лежащего против стороны $BC = a$?

3. Градусные меры двух углов треугольника равны α и β. Длина стороны, лежащей против угла α, равна m. Верно ли, что длина стороны, лежащей против угла β, равна $\frac{m\sin\beta}{\sin\alpha}$?

4. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен R, а градусная мера одного из его углов равна φ. Верно ли, что длина стороны, лежащей против угла φ, равна $2R\sin\varphi$?

5. Градусная мера угла при вершине равнобедренного треугольника равна $120°$, а длина боковой стороны равна a. Чему равен радиус окружности, описанной около данного треугольника?

6. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна $15°$, а радиус описанной окружности равен R. Найдите основание треугольника.

7. Чему равна площадь выпуклого четырехугольника, если его диагонали взаимно перпендикулярны и их длины равны m и n?

8. В равнобедренном треугольнике длина основания равна a, а длина боковой стороны равна p. Найдите длину медианы, проведенной к боковой стороне данного треугольника.

9. При каком условии площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2}mn$, где m и n — длины диагоналей четырехугольника?

3

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

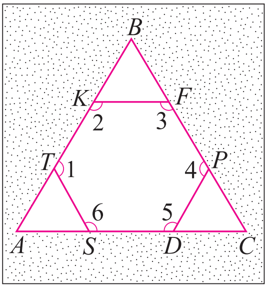
Глава 3

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

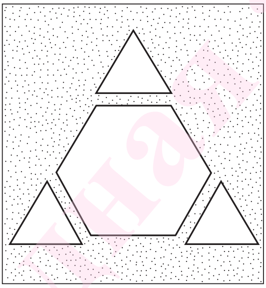
§ 1. Правильные многоугольники

1. Правильный многоугольник. В предыдущих классах уже были изучены свойства *равностороннего треугольника* и *квадрата*. Каждая из этих фигур обладает тем свойством, что у них все углы равны и все стороны равны. Указанные геометрические фигуры служат примерами *правильных многоугольников*, свойства которых и рассматриваются в данном параграфе.

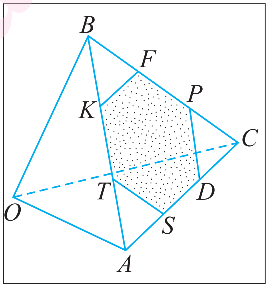
Определение. **Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.**



а)



б)



в)

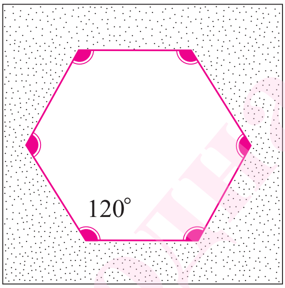
Рис. 81

Рассмотрим пример. Пусть ABC — равносторонний треугольник. Разделим каждую его сторону на три равные части, как показано на рисунке 81, *а*. Каждый из треугольников ATS, KBF и DPC является равносторонним. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = 180° - 60° = 120°$. Кроме того, $ST = TK = KF = FP = PD = DS$. Таким образом, шестиугольник $TKFPDS$ является правильным.

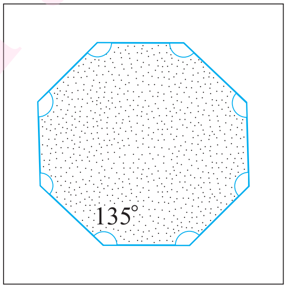
Модель этого правильного многоугольника получится, если от листа бумаги, имеющего форму равностороннего треугольника, отрезать равные части, имеющие форму равносторонних и равных между собой треугольников, как показано на рисунке 81, *б*.

Если треугольник ABC является гранью тетраэдра $BOAC$ (тетраэдр — треугольная пирамида, у которой все четыре грани — равные равносторонние треугольники), а каждая пара точек T, K; F, P и D, S делит соответственно ребра AB, BC и AC на три равные части, то $TKFPDS$ — правильный шестиугольник, лежащий на грани ABC (рис. 81, *в*).

Ранее, в § 1 главы **1** учебного пособия «Геометрия, 8», была доказана теорема о том, что сумма градусных мер углов любого выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$. Из доказанной теоремы и определения правильного n-угольника следует, что градусную меру каждого его угла можно найти по формуле $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$. Например, для правильного шестиугольника $\alpha_6 = \frac{180°(6-2)}{6} = 120°$ (рис. 82, *а*), а для правильного восьмиугольника $\alpha_8 = \frac{180°(8-2)}{8} = 135°$ (рис. 82, *б*).



а)



б)

Рис. 82

2. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Вы знаете, что около правильного треугольника и правильного четырехугольника можно описать окружность. Теперь изучим вопрос о существовании окружности, описанной около правильного многоугольника.

Определение. **Окружность называется описанной около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности. При этом многоугольник называется вписанным в окружность.**

Оказывается, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность. Докажем следующую теорему.

Теорема 1 (*об окружности, описанной около правильного многоугольника*). ***Около любого правильного многоугольника можно описать единственную окружность.***

Доказательство.

I. *Докажем существование окружности.*

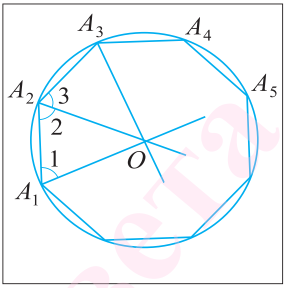


Рис. 83

1) Пусть $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ — правильный многоугольник. Докажем, что существует точка, равноудаленная от всех его вершин. Пусть точка O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2. Соединим точку O отрезками со всеми вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_{n-1} = OA_n$ (рис. 83).

2) Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, а OA_1 и OA_2 — биссектрисы, то $\angle 1 = \angle 2$, т. е. треугольник OA_1A_2 — равнобедренный, а значит, $OA_1 = OA_2$.

3) Заметим, что треугольник OA_1A_2 равен треугольнику OA_2A_3 по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_2A_3$, сторона OA_2 — общая, $\angle 2 = \angle 3$). Из равенства этих треугольников следует, что $OA_3 = OA_1$. Так же можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

4) Таким образом, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_{n-1} = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от вершин многоугольника. Следовательно, окружность ω с центром в точке O и радиуса OA_1 является описанной около многоугольника. Из доказательства следует, что *центром окружности, описанной около правильного многоугольника, является точка пересечения биссектрис углов этого многоугольника.*

II. *Докажем, что описанная окружность единственная.*

Пусть существует еще одна окружность ω_1, которая описана около правильного многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Тогда эта окружность является описанной, например, около треугольника $A_1A_2A_3$. Но около треугольника $A_1A_2A_3$ можно описать единственную окружность, значит, окружности ω и ω_1 совпадают, т. е. около многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ можно описать единственную окружность.

Теорема доказана.

3. Окружность, вписанная в правильный многоугольник. Известно, что в любой правильный треугольник можно вписать окружность. Рассмотрим вопрос о существовании окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Определение. **Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются окружности. При этом многоугольник называется описанным около окружности.**

Докажем, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Теорема 2 (*об окружности, вписанной в правильный многоугольник*). ***В любой правильный многоугольник можно вписать единственную окружность.***

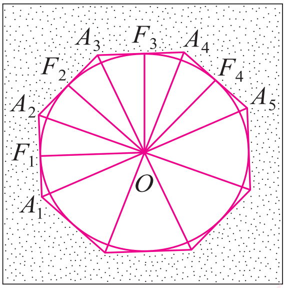


Рис. 84

I. *Докажем существование окружности.*

1) Пусть $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ — правильный многоугольник. Докажем, что существует точка, равноудаленная от прямых, содержащих стороны многоугольника (рис. 84).

2) Пусть точка O — центр описанной около многоугольника окружности. Теперь проведем высоты OF_1, OF_2, ..., OF_{n-1}, OF_n соответственно треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1. Как было доказано в предыдущей теореме, эти треугольники равны между собой, следовательно, равны их высоты, т. е. $OF_1 = OF_2 = ... = OF_n$.

3) Таким образом, окружность ω с центром в точке O радиуса OF_1 проходит через точки F_1, F_2, ..., F_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в правильный многоугольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$.

Заметим также, что центр O вписанной в правильный многоугольник окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам многоугольника.

Подчеркнем, что *для правильного многоугольника центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности.*

II. *Докажем, что вписанная окружность единственная.*

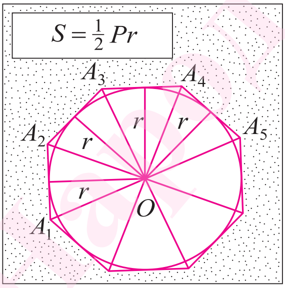
Предположим, что существует еще одна окружность ω_1, вписанная в правильный многоугольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Тогда центр O_1 этой окружности равноудален от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, а значит, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. он равен OF_1. Следовательно, окружности ω и ω_1 совпадают.

Теорема доказана.

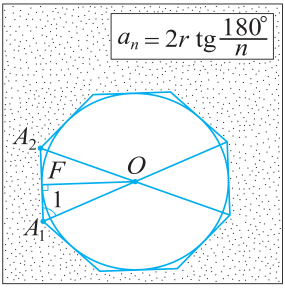
Центром правильного многоугольника называется центр его вписанной и описанной окружностей.

4. Выражение элементов n-угольника через радиус вписанной или описанной окружностей. Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n— длина его стороны, P — периметр, а r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

1) ***Площадь S правильного n-угольника, описанного около окружности, можно найти, зная периметр P и радиус r вписанной окружности, по формуле $S = \frac{1}{2}Pr$.***



а)



б)

Рис. 85

Соединим центр O правильного многоугольника с его вершинами (рис. 85, *а*). Тогда многоугольник разбивается на n равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}a_nr$. Следовательно, $S = n \cdot \frac{1}{2}a_nr = \frac{1}{2}(na_n)r = \frac{1}{2}Pr$.

Что и требовалось доказать.

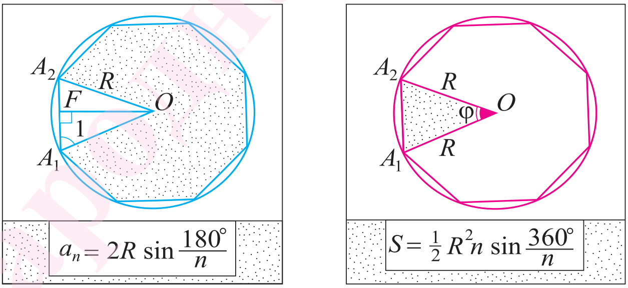
2) ***Длину стороны a_n правильного n-угольника можно найти, зная радиус r вписанной окружности, по формуле $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$.***

Соединим центр многоугольника с вершинами A_1 и A_2 и проведем высоту OF равнобедренного треугольника OA_1A_2 (рис. 85, *б*). Так как многоугольник правильный, то $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$. В равнобедренном треугольнике OA_1A_2 высота OF, проведенная к основанию, является биссектрисой, следовательно, $\angle A_1OF = \frac{180^\circ}{n}$. Таким образом, $a_n = A_1A_2 = 2A_1F = OF\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n} = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$.

Что и требовалось доказать.

Так как $S = \frac{1}{2}Pr$ и $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$, то площадь $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$.

3) ***Длину стороны a_n правильного n-угольника можно найти, зная радиус R описанной окружности, по формуле $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.***



а) *б)*

Рис. 86

Пусть OF — высота равнобедренного треугольника OA_1A_2 (рис. 86, *а*). Тогда $\angle A_1OF = \frac{1}{2}\angle A_1OA_2 = \frac{180^\circ}{n}$. В прямоугольном треугольнике A_1FO $A_1F = OA_1\sin\frac{180^\circ}{n} = R\sin\frac{180^\circ}{n}$. Таким образом, $a_n = 2A_1F = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Что и требовалось доказать.

Для *правильного треугольника* ($n = 3$), *квадрата* ($n = 4$) и *правильного шестиугольника* ($n = 6$) получим соответственно формулы: $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_4 = R\sqrt{2}$; $a_6 = R$.

4) ***Площадь S правильного n-угольника можно найти, зная радиус R описанной окружности, по формуле*** $S = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360°}{n}$.

Соединим вершины правильного n-угольника с его центром (рис 86, *б*). Тогда многоугольник разобьется на n равных треугольников. Следовательно, $S = nS_{OA_1A_2} =$ $= n\left(\frac{1}{2}OA_1 \cdot OA_2 \sin\varphi\right) = n\left(\frac{1}{2}R^2 \sin\frac{360°}{n}\right) = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360°}{n}$.

Что и требовалось доказать.

5) ***Радиус r вписанной окружности можно найти, зная радиус R описанной окружности, по формуле*** $r = R\cos\frac{180°}{n}$.

В прямоугольном треугольнике OA_1F $r = OF =$ $= R\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = R\cos\frac{180°}{n}$ (см. рис. 86, *а*).

Что и требовалось доказать.

5. Построение правильных многоугольников. Вопрос о построении правильного треугольника уже рассматривался ранее. Покажем, каким образом можно с помощью циркуля и линейки построить правильный треугольник, вписанный в окружность.

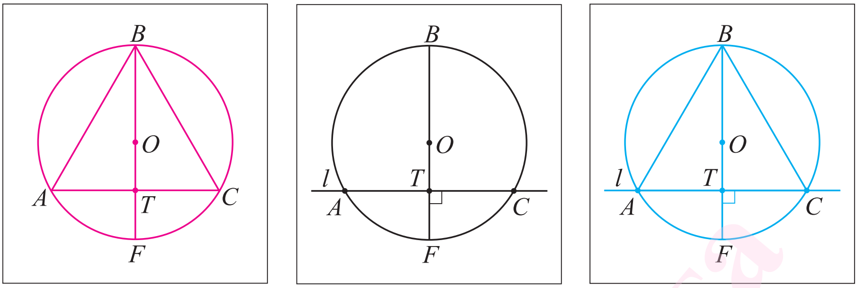
Задача 1. Постройте правильный треугольник, вписанный в данную окружность.

Поиск решения.

Пусть правильный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Проведем диаметр BF этой окружности, обозначим буквой T точку пересечения этого диаметра со стороной AC. Тогда положение точки T на отрезке OF характеризуется равенством $OT = TF$; *т. к. центр равностороннего треугольника есть точка пересечения медиан, то* $OT = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R$. *Кроме того,* $AC \perp BF$. *Теперь можем осуществить построение* (рис. 87, *а*).

Построение.

1) Проводим диаметр BF окружности и строим точку T — середину отрезка OF (рис. 87, *б*).



а) *б)* *в)*

Рис. 87

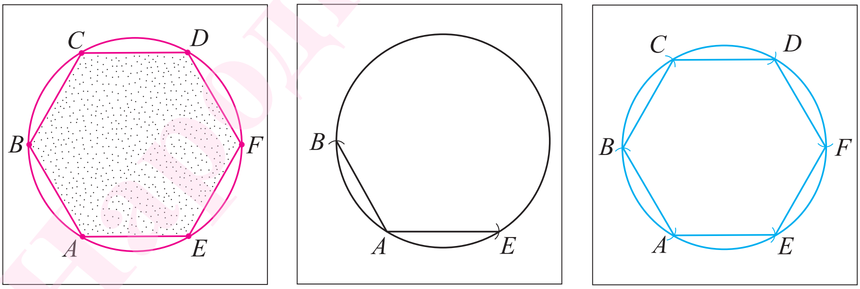
2) Строим прямую l, которая проходит через точку T и перпендикулярна диаметру BF (рис. 87, *б*).

3) Отметим точки A и C пересечения прямой l с окружностью.

4) Строим отрезки BA и BC (рис. 87, *в*). Треугольник ABC — искомый.

Докажите самостоятельно, что построенный треугольник — правильный.

Задача 2. Постройте правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку a.



а) *б)* *в)*

Рис. 88

Поиск решения.

Пусть ABCDFE — правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Рассмотрим описанную около этого шестиугольника окружность. Известно, что радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен его стороне, т. е. $R = AB = BC = CD = DF = FE = EA = a$

(рис. 88). *Этим можем воспользоваться для построения шестиугольника.*

Построение.

1) Строим окружность ω с центром O и радиуса a.

2) Выбираем на этой окружности произвольную точку A и строим окружность $\omega_1(A, a)$. Отметим точки B и E пересечения окружности ω_1 с окружностью ω (рис. 88, *б*).

3) Далее строим точку C, которая является одной из точек пересечения окружности ω и окружности $\omega_2(B, a)$. Аналогично строим точки D и F. Шестиугольник $ABCDFE$ — искомый (рис. 88, *в*).

Заметим, что результат задачи 1 позволяет построить правильный шестиугольник, если построен правильный треугольник.

Вопросы к § 1

1. Какой многоугольник называется правильным?

2. Какая окружность называется описанной около многоугольника?

3. Верно ли, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность?

4. Какая окружность называется вписанной в многоугольник?

5. По какой формуле можно вычислить длину стороны правильного n-угольника, если известен радиус вписанной в него окружности?

6. По какой формуле можно вычислить длину стороны правильного n-угольника, если известен радиус описанной около него окружности?

7. По какой формуле можно вычислить площадь правильного n-угольника, если известен радиус описанной около него окружности?

Задачи к § 1

289. Вычислите градусные меры углов правильного: а) пятиугольника; б) десятиугольника; в) двенадцатиугольника.

290. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если градусная мера его угла равна: а) $150°$; б) $156°$; в) $144°$?

291. Площадь квадрата, описанного около окружности, равна 16 см^2. Вычислите площадь квадрата, вписанного в окружность.

292. Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 12 см. Вычислите: а) радиус данной окружности; б) радиус окружности, вписанной в квадрат; в) периметр квадрата, описанного около данной окружности.

293. Площадь квадрата, вписанного в окружность, равна 8 см^2. Вычислите: а) радиус этой окружности; б) длину стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность; в) длину стороны квадрата, описанного около данной окружности.

294. Докажите, что отношение площади квадрата, вписанного в окружность, к площади квадрата, описанного около этой окружности, равно $1 : 2$.

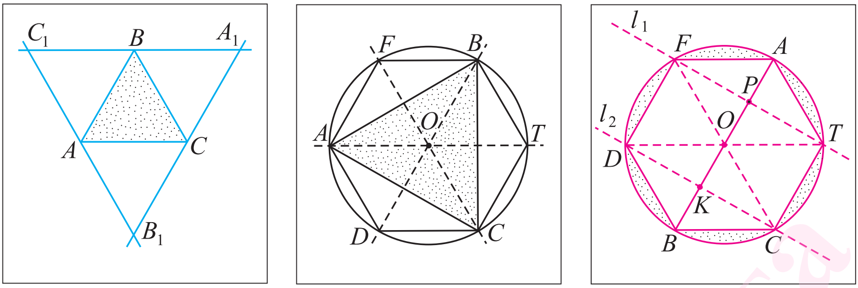
295. В окружность радиуса 12 см вписан правильный треугольник. Вычислите: а) высоту треугольника; б) расстояние от центра окружности до прямой, содержащей его сторону; в) длину стороны треугольника; г) радиус вписанной в этот треугольник окружности.

296. Периметр правильного треугольника, описанного около окружности, равен $18\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь квадрата, описанного около этой окружности.

297. Вычислите площадь правильного треугольника, описанного около окружности радиуса 4 см.

298. Прямые, проходящие через вершины правильного треугольника ABC и параллельные его противолежащим сторонам, пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 (рис. 89, *а*). Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.

299. Правильный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Точки F, T и D — точки пересечения лучей CO, AO и BO с окружностью соответственно (рис. 89, *б*). Докажите, что шестиугольник $AFBTCD$ — правильный.



а) б) в)

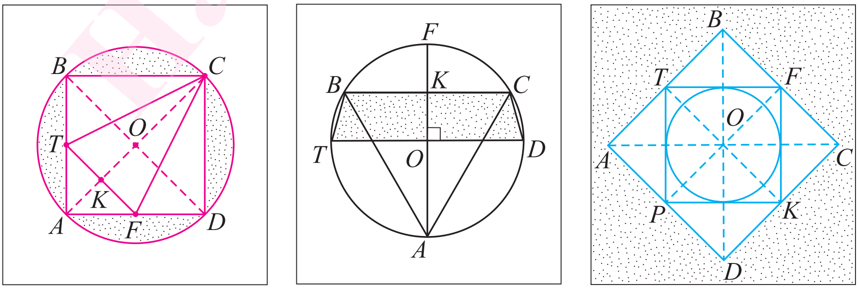
Рис. 89

300. Точки F, T и K — точки, симметричные центру O равностороннего треугольника ABC относительно прямых AB, BC и AC соответственно. Докажите, что шестиугольник $AFBTCK$ — правильный.

301. Отрезок AB — диаметр окружности, центром которой является точка O. Через середины P и K радиусов AO и BO проведены прямые l_1 и l_2, которые пересекают окружность в точках F, T и D, C соответственно и перпендикулярны диаметру AB. Докажите, что шестиугольник $FATCBD$ — правильный (рис. 89, *в*).

302. Длина стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

303. В окружность радиуса R вписан квадрат $ABCD$. Точки T и F — середины сторон AB и AD соответственно (рис. 90, *а*). Найдите площадь треугольника TCF.



а) б) в)

Рис. 90

304. В окружность с центром в точке O и радиуса R вписан правильный треугольник ABC. Отрезки AF и TD — взаимно перпендикулярные диаметры окружности (рис. 90, *б*). Найдите площадь четырехугольника $TBCD$.

305. Точки T, F, K и P — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ (рис. 90, *в*). Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в четырехугольник $PTFK$, равен 10 см.

306. Радиус окружности, описанной около правильного четырехугольника $ABCD$, равен R. Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон четырехугольника $ABCD$.

307. Длина меньшей диагонали правильного шестиугольника равна 10 см. Вычислите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.

308. Вычислите площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$, если площадь треугольника BCD равна 10 см^2.

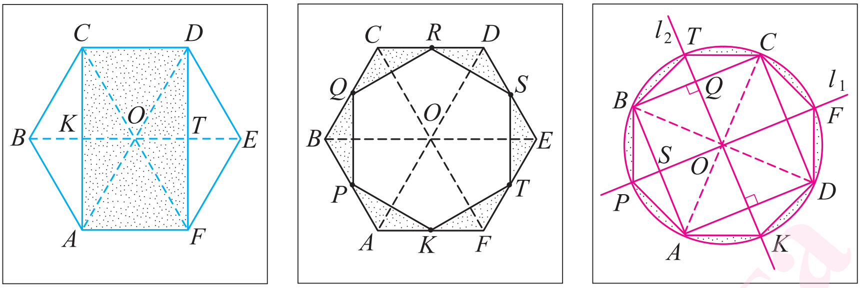
309. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BDF.

310. Докажите, что площадь S правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, можно найти по формуле $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.

311. Докажите, что площадь S правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса r, можно найти по формуле $S = 2\sqrt{3}r^2$.

312. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что: а) треугольник BDF — правильный; б) четырехугольник $ABCO$ — ромб.

313. Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника $ABCDEF$, равен R. Докажите, что четырехугольник $ACDF$ является прямоугольником. Найдите площадь прямоугольника $ACDF$ (рис. 91, *а*).



а) б) в)

Рис. 91

314. Докажите, что середины сторон правильного шестиугольника *ABCDEF* являются вершинами правильного шестиугольника *PQRSTK* (рис. 91, *б*). Найдите отношение периметра шестиугольника *ABCDEF* к периметру шестиугольника *PQRSTK*.

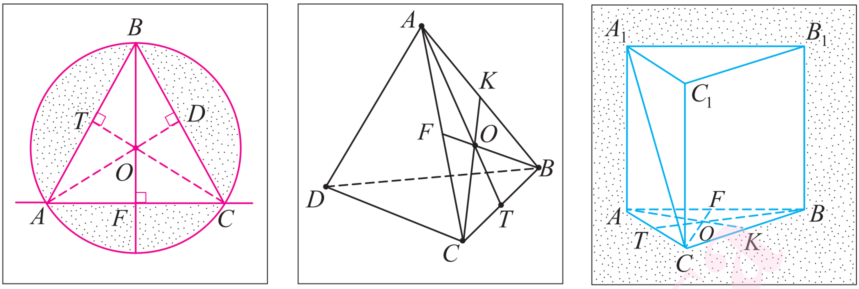
315. В окружность, центром которой является точка *O*, вписан квадрат *ABCD*. Прямые l_1 и l_2 проходят через центр квадрата, перпендикулярны противолежащим сторонам и пересекают окружность в точках *F*, *P* и *T*, *K* соответственно (рис. 91, *в*). Докажите, что восьмиугольник *APBTCFDK* является правильным.

316. Периметр квадрата, описанного около окружности, равен *P*. Найдите периметр правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

317. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность, на 3 см меньше периметра правильного четырехугольника, описанного около этой окружности. Вычислите радиус окружности.

318. Площадь правильного треугольника *ABC* равна $\sqrt{3}$ см^2. Вычислите расстояние от центра *O* описанной около треугольника окружности до прямой, содержащей его сторону (рис. 92, *а*).

319. Радиус окружности, описанной около грани *ABC* тетраэдра *ABCD*, равен 6 см. Вычислите длину ломаной *DACTO*, где точка *O* — центр окружности, описанной около грани *ABC*, точка *T* — середина ребра *BC* (рис. 92, *б*).



а) б) в)

Рис. 92

320. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC (рис. 92, *в*). Вычислите радиус окружности, описанной около основания призмы, если все ребра призмы равны между собой, а длина диагонали боковой грани призмы равна $3\sqrt{2}$ см.

321. В окружность вписан правильный треугольник ABC. Постройте правильный шестиугольник, вписанный в окружность, для которого точки A, B и C служат вершинами.

322. Постройте: а) правильный четырехугольник, вписанный в окружность; б) правильный треугольник, описанный около окружности; в) правильный четырехугольник, описанный около окружности; г) правильный восьмиугольник, вписанный в окружность.

323. Найдите отношение площади правильного шестиугольника, описанного около окружности, к площади правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

324. Центры двух окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды, длина которой равна a. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если в одной окружности хорда служит стороной правильного вписанного треугольника, а в другой — стороной вписанного квадрата.

325. Площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна S. Найдите площадь правильного четырехугольника, вписанного в эту окружность.

326. С помощью циркуля и линейки постройте правильный треугольник по отрезку m, равному его высоте.

327. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник по отрезку a, равному его меньшей диагонали.

328*. Дан равносторонний треугольник ABC. С помощью циркуля и линейки постройте равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ так, что $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ и стороны A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 перпендикулярны сторонам AC, AB, BC соответственно.

329. В квадрате $ABCD$ точки K, P, E и T — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что четырехугольник, ограниченный прямыми BT, PD, CK и AE, является квадратом. Найдите его площадь, если площадь квадрата $ABCD$ равна S.

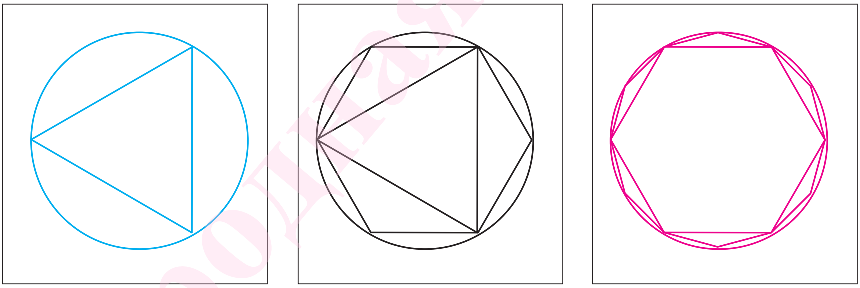
330. В квадрат $ABCD$, длина стороны которого равна a, вписана окружность. Окружность касается стороны CD в точке E. Найдите длину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

331. В квадрат, длина стороны которого равна a, вписана окружность. Найдите площадь квадрата, описанного около меньшей окружности, которая касается данной окружности и двух смежных сторон данного квадрата.

332*. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других сторон на отрезки, длины которых равны 2 см и 23 см. Вычислите радиус окружности.

§ 2. Длина окружности. Радианная мера угла

1. Понятие длины окружности. Рассмотрим вопрос о вычислении длины окружности. Пусть в окружность вписан правильный n-угольник. Если число n сторон правильного n-угольника, вписанного в окружность, неограниченно возрастает, то геометрическая фигура, образованная его сторонами, все меньше и меньше отличается от окружности (рис. 93, *а*, *б*, *в*). В вузовском курсе математического анализа устанавливается, что существует число, к которому стремятся периметры P_n правильных n-угольников, вписанных в окружность, при неограниченном возрастании числа их сторон. Это число называется длиной окружности. Таким образом, *за длину окружности принимается число, к которому стремятся периметры вписанных в окружность правильных n-угольников при неограниченном увеличении числа их сторон.*



а) *б)* *в)*

Рис. 93

Длина окружности зависит от ее радиуса, окружность большего радиуса имеет большую длину. Вместе с тем можно доказать, что отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное.

2. Теорема об отношении длины окружности к ее диаметру. Докажем теорему, которая характеризует отношение длины окружности к ее диаметру.

Теорема (*об отношении длины окружности к ее диаметру*). ***Отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное для всех окружностей.***

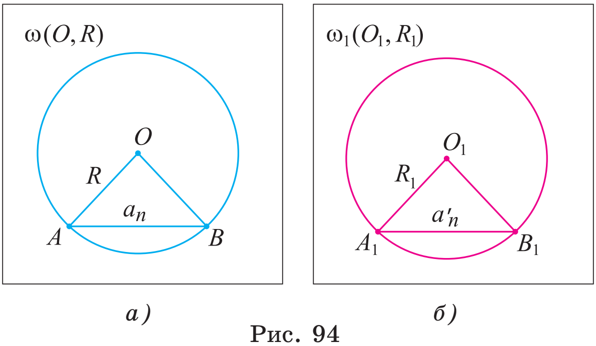


Рис. 94

Дано: $\omega(O, R)$, $\omega_1(O_1, R_1)$ — окружности, C, C_1 — соответственно длины этих окружностей.

Доказать: $\dfrac{C}{2R} = \dfrac{C_1}{2R_1}$.

Доказательство.

1) Впишем в каждую из окружностей правильные n-угольники. Пусть длины a_n, a'_n — стороны этих многоугольников, P_n, P'_n — соответственно их периметры (рис. 94, *а, б*).

2) Теперь воспользуемся формулой, которой выражается длина стороны правильного n-угольника через радиус описанной окружности. Учитывая эту формулу (глава **3**, § **1**, п. **3**), можем записать равенства $P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \dfrac{180°}{n}$ и $P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R_1 \sin \dfrac{180°}{n}$. Следовательно, верно равенство $\dfrac{P_n}{P'_n} = \dfrac{2R}{2R_1}$ (1).

3) Это равенство верно при любом значении n. Будем неограниченно увеличивать число n, тогда периметр P_n первого многоугольника стремится к длине C первой окружности, а периметр P'_n второго многоугольника стремится к длине C_1 второй окружности, т. е. $\dfrac{P_n}{P'_n}$ стремится к $\dfrac{C}{C_1}$.

4) Таким образом, $\dfrac{C}{C_1} = \dfrac{2R}{2R_1}$. Отсюда следует, что $\dfrac{C}{2R} = \dfrac{C_1}{2R_1}$. Значит, отношение длины окружности к ее диаметру одно и то же для всех окружностей.

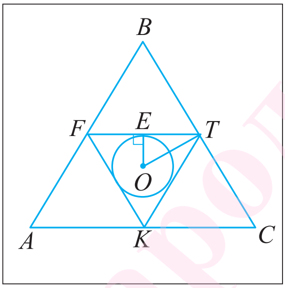
Теорема доказана.

Число, равное отношению длины окружности к ее диаметру, обозначается строчной греческой буквой π (читается «пи»). Доказано, что число π — иррациональное, то есть выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Приближенное значение числа π с точностью до восьми знаков после запятой такое: $\pi \approx 3{,}14159265$. При решении задач в школьной практике пользуются приближенным значением числа π с точностью до сотых: $\pi \approx 3{,}14$.

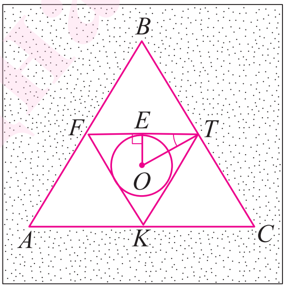
3. Длина окружности. Длина дуги окружности. Для нахождения формулы длины окружности воспользуемся равенством $\frac{C}{2R} = \pi$. Отсюда следует, что *длину окружности радиуса R можно найти по формуле $C = 2\pi R$* или по формуле $C = \pi D$, где D — диаметр окружности.

Теперь выведем формулу для вычисления длины l дуги окружности, градусная мера которой равна α. Пусть данная дуга является дугой окружности радиуса R. Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в $1°$ равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Так как градусная мера дуги равна α, то *длина l этой дуги выражается*: $l = \frac{\pi R \alpha}{180°}$.

Задача 1. Точки F, T и K — середины сторон равностороннего треугольника ABC. Найдите длину окружности, вписанной в треугольник FTK, если длина стороны треугольника ABC равна a.



а)



б)

Рис. 95

Дано: $\triangle ABC$,
$AB = BC = CA = a$,
$AF = FB$, $F \in AB$,
$BT = TC$, $T \in BC$,
$AK = KC$, $K \in AC$.
Найти: длину окружности, вписанной в треугольник FTK.

Решение.

Для нахождения длины окружности можем воспользоваться формулой $C = 2\pi r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник FTK. Для нахождения радиуса r воспользуемся тем, что треугольник FTK также является равносторонним.

1) Пусть точка O — центр окружности, вписанной в треугольник FTK, а E — точка касания окружности и стороны FT (рис. 95, *а, б*).

2) Треугольник FTK является равносторонним, так как $FT = TK = KF = \frac{1}{2}AB$. Треугольник TEO — прямоугольный, $\angle ETO = 30°$ ($OE \perp FT$, так как отрезок OE — радиус, проведенный в точку касания, луч OT — биссектриса угла ETK).

3) В прямоугольном треугольнике TEO $OE = ET \operatorname{tg} 30°$.

Так как $OE = r$ и $ET = \frac{1}{2}FT = \frac{a}{4}$, то $r = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Заметим, что радиус r можно найти и другим способом, воспользовавшись тем, что треугольник FTK подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

Таким образом, длина окружности $C = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a\pi\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\frac{a\pi\sqrt{3}}{6}$.

Задача 2. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат. Вычислите длину окружности, описанной около боковой грани призмы, если длина окружности, описанной около основания призмы, равна 8π см, а боковое ребро в два раза больше стороны основания призмы.

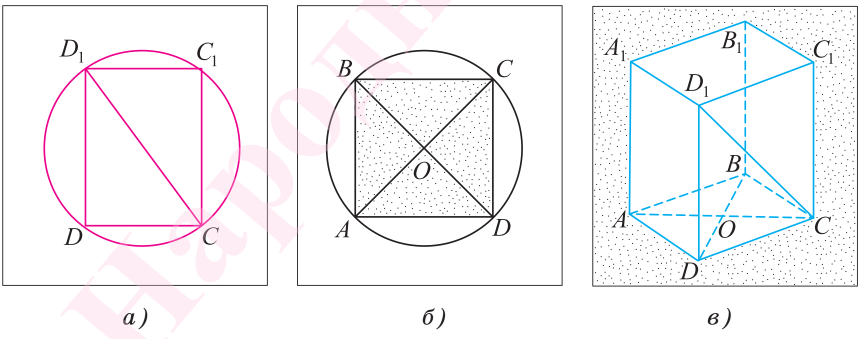


Рис. 96

Решение.

Длину C окружности можно найти по формуле $C = 2\pi R$, где R — радиус окружности. Данная призма является прямой, и ее основаниями служат квадраты, следовательно, все боковые грани — равные между собой прямоугольники. Диагональ грани DD_1C_1C равна диаметру описанной около него окружности, т. е. $D_1C = 2R$ (рис. 96, *а*, *б*, *в*).

1) По условию длина окружности, описанной около квадрата $ABCD$, равна 8π см. Диаметр окружности равен диагонали AC, таким образом, $\pi \cdot AC = 8\pi$. Отсюда $AC = 8$ см.

2) Так как четырехугольник $ABCD$ — квадрат, то $AC = DC\sqrt{2}$. Следовательно, $DC = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (см).

3) По условию $DD_1 = 2DC = 8\sqrt{2}$ см. В прямоугольном треугольнике D_1DC $D_1C = \sqrt{DD_1^2 + DC^2} = 4\sqrt{10}$ см. Диаметр окружности, описанной около грани DD_1C_1C, равен D_1C, т. е. $2R = 4\sqrt{10}$ см. Теперь вычислим длину окружности, описанной около боковой грани DD_1C_1C: $C = 2\pi R = 4\pi\sqrt{10}$ см.

Ответ: $4\pi\sqrt{10}$ см.

4. Радианная мера угла. Ранее была определена единица измерения углов — *градус*. Наряду с ней используется единица измерения углов, которая называется *радианом.*

Углом в один радиан называется центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

Радианная мера угла — это величина угла, выраженная в радианах.

Установим связь между радианной и градусной мерой угла.

Углу, градусная мера которого равна $180°$, соответствует полуокружность, длина l которой равна πR, т. е. $l = \pi R$. Для нахождения радианной меры этого угла надо длину этой дуги разделить на радиус, т. е. $\frac{l}{R} = \pi$.

Следовательно, радианная мера развернутого угла равна π, т. е. $180° = \pi$ рад. Таким образом, радианная мера угла в $1°$ равна $\frac{\pi}{180}$, т. е. $1° = \frac{\pi}{180}$ рад. При записи используется сокращенное обозначение радиана — «рад».

Из равенства $180° = \pi$ рад следует, что градусная мера угла в 1 радиан равна $\frac{180°}{\pi}$, т. е. $1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi}$. Приближенно 1 радиан равен $57°$.

Из определения радиана следует, что длина l дуги окружности радиуса R, соответствующей центральному углу в x радиан, равна Rx.

Рассмотрим примеры перехода от радианной меры к градусной и от градусной меры к радианной.

Задача 3. Вычислите градусную меру угла 3 рад.

Решение.

Так как 1 рад $= \frac{180°}{\pi}$, то 3 рад $= 3 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{540°}{\pi} \approx 172°$.

Задача 4. Вычислите радианную меру угла 30°.

Решение.

Так как $1° = \frac{\pi}{180}$ рад, то $30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{\pi}{6}$ рад.

При записи радианной меры угла обозначение рад можно опускать. Например, вместо $30° = \frac{\pi}{6}$ рад запишем $30° = \frac{\pi}{6}$.

Задачи к § 2

333. Площадь квадрата равна 9 см^2. Вычислите длину окружности, описанной около этого квадрата.

334. Длина окружности, описанной около квадрата, равна 16π см. Вычислите периметр квадрата.

335. Периметр квадрата равен 12 см. Вычислите длину окружности, описанной около четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного квадрата.

336. Площадь квадрата равна S. Найдите длину окружности, вписанной в данный квадрат.

337. Площадь правильного треугольника равна $\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину окружности, описанной около этого треугольника.

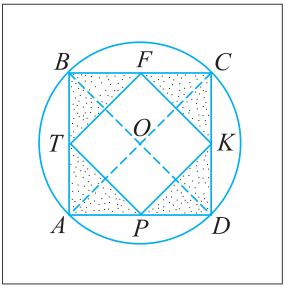
338. Длина окружности, описанной около равностороннего треугольника, равна $2\pi\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр этого треугольника.

339. Периметр правильного треугольника равен 18 см. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного правильного треугольника.

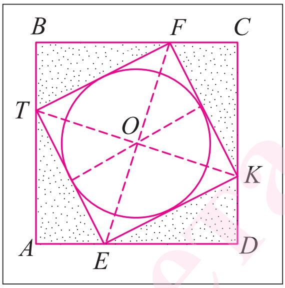
340. Площадь равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину окружности, вписанной в этот треугольник.

341. Площадь четырехугольника $TFKP$, вершинами которого служат середины сторон квадрата $ABCD$, равна S.

Найдите длину окружности, описанной около квадрата *ABCD* (рис. 97, *а*).



а)



б)

Рис. 97

342. Точки T, F, K и E лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$. Вычислите длину окружности, вписанной в четырехугольник $TFKE$, если $AB = 3$ см и $AE = TB = FC = KD = 1$ см (рис. 97, *б*).

343. Длина окружности, описанной около прямоугольника, равна 20π см. Вычислите периметр прямоугольника, если его диагональ образует со стороной угол, градусная мера которого равна $30°$.

344. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 12 см^2, а его периметр — 14 см. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника ABC.

345. Отрезок BF — перпендикуляр, проведенный из вершины B прямоугольника $ABCD$ к его диагонали AC. Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольника, если $BF = 6$ см и $AF = 4$ см.

346. Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если его площадь равна 48 см^2, а длина одного из катетов — 6 см.

347. Длина окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равна 26π см, а длина одного из его катетов равна 10 см. Вычислите площадь треугольника.

348. Вычислите длину окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 6 см и 8 см.

349. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Вычислите длину окружности, вписанной в ромб, если его периметр равен 40 см.

350. Длина окружности, вписанной в ромб, равна $2\pi\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь этого ромба, если его сторона равна диагонали.

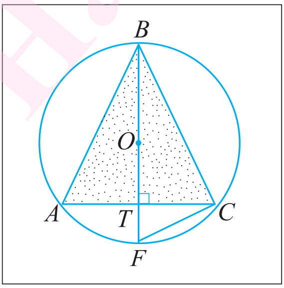
351. Точки T, F, K и P — середины сторон AB, BC, CD и AD ромба $ABCD$ соответственно. Найдите длину окружности, описанной около четырехугольника $TFKP$, если длина стороны ромба равна a.

352. Длина стороны основания равнобедренного треугольника равна 16 см, а градусная мера одного из его углов равна 150°. Вычислите длину окружности, описанной около этого треугольника.

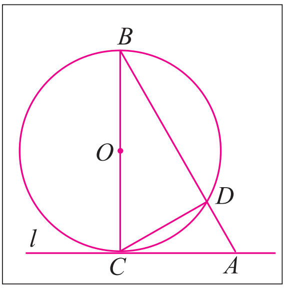
353. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна 75°, а длина его основания равна 10 см. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника.

354. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна $\frac{25}{4}\pi$ см. Вычислите синус угла при основании треугольника, если длина его боковой стороны равна 5 см.

355. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, равна 25π см, отрезок BF — диаметр окружности. Вычислите длину хорды FC, если высота, проведенная к основанию AC, равна 16 см (рис. 98, a).



а)



б)

Рис. 98

356. Отрезок BC — диаметр окружности, центром которой является точка O. Прямая l касается окружности в точке C, $A \in l$ (рис. 98, *б*). Отрезок AB пересекает окружность в точке D так, что $AD : DB = 1 : 3$. Вычислите длину окружности, если $CD = 3$ см.

357. На стороне AB прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AC в точке D. Вычислите длину окружности, если $BD = 24$ см и $BC = 30$ см.

358. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Вычислите длину окружности, диаметром которой является медиана, проведенная к гипотенузе.

359. В окружность вписана трапеция, одно из оснований которой является диаметром окружности. Градусная мера угла трапеции равна 60°, а ее площадь равна $12\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину окружности.

360. Длина стороны треугольника равна 18 см, а градусные меры прилежащих к ней углов равны 70° и 80°. Вычислите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность.

361. Длина стороны основания равнобедренного треугольника равна $2\sqrt{3}$ см, а градусная мера угла при основании равна 30°. Вычислите длины дуг, на которые вершины треугольника делят окружность, описанную около треугольника.

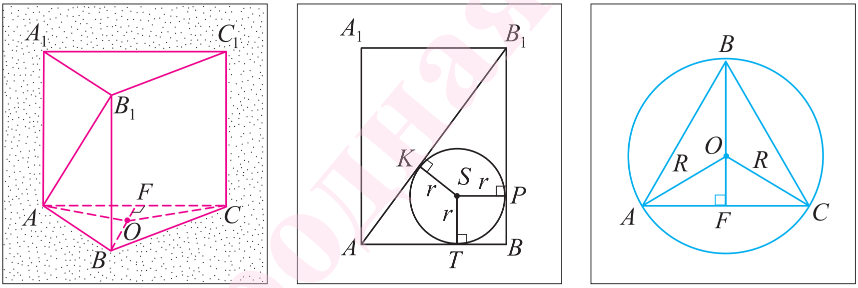
362. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является диаметром окружности. Вычислите длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника, если градусная мера угла при основании треугольника равна 70°, а его высота, проведенная к основанию, равна 36 см.

363. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 75°. Высота, проведенная к основанию треугольника, является диаметром окружности. Вычислите длину этой высоты, если длина дуги окружности, расположенной внутри треугольника, равна 2π.

364. Градусная мера одного из углов ромба равна $120°$, а длина его меньшей диагонали равна $4\sqrt{3}$ см. Диаметром окружности является половина большей диагонали ромба. Вычислите длину дуги этой окружности, расположенной внутри ромба.

365. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 12 см, а градусная мера его угла равна $30°$. На меньшем катете как на диаметре построена окружность. Вычислите длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника.

366. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC. Вычислите длину окружности, вписанной в треугольник ABB_1, если $AA_1 = 4$ см, а длина окружности, описанной около треугольника ABC, равна $2\pi\sqrt{3}$ см (рис. 99, *а, б, в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 99

367. Отрезок BF — перпендикуляр, проведенный из вершины B к диагонали AC прямоугольника $ABCD$. Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольника, если $AF : FC = 1 : 3$ и $AB = 12$ см.

368. Длина основания равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см, а высота, проведенная к его основанию, в два раза меньше боковой стороны. Эта высота является диаметром окружности. Вычислите длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника.

369. Отрезки BT и BF — высоты, проведенные из вершины тупого угла ромба $ABCD$ к его сторонам. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle ABC = 120°$, а расстояние между основаниями проведенных высот равно 6 см.

370. Длина одной из сторон треугольника на 2 см меньше длины другой. Вычислите длину окружности, вписанной в треугольник, если высота делит третью сторону на отрезки, длины которых равны 5 см и 9 см.

371. Диагональ равнобедренной трапеции, длина которой равна 20 см, перпендикулярна боковой стороне. Вычислите длину окружности, диаметром которой является средняя линия трапеции, если отношение длин боковой стороны и большего основания равно $3 : 5$.

372. Окружность, центром которой является точка O, лежащая на гипотенузе AC прямоугольного треугольника, касается его сторон AB и BC в точках F и E соответственно. Вычислите длины окружностей, построенных на отрезках AO и CO как на диаметрах, если $AB = 3$ см и $BC = 4$ см.

373. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки, длины которых равны 15 см и 20 см. Вычислите длину полуокружности.

374. В равносторонний треугольник вписана окружность. Окружность радиуса r касается этой окружности и двух сторон треугольника. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

375. Через точку S к окружности проведены прямые l_1 и l_2, которые касаются окружности в точках A и B. Меньшая окружность касается данных прямых и данной окружности в точке F. Найдите длину меньшей окружности, если градусная мера дуги AFB равна 120°, а ее длина равна m.

376. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, а ее боковая сторона точкой касания делится на отрезки, длины которых равны 4 см и 9 см. Вычислите длину окружности, вписанной в трапецию.

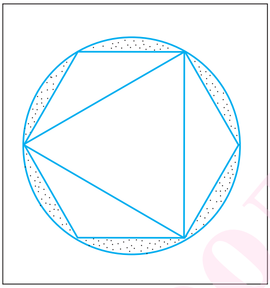
377. Вычислите градусную меру угла, радианная мера которого равна: а) 6,2; б) 2,5; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{3}{2}\pi$; ж) 2π.

378. Вычислите радианную меру угла, градусная мера которого равна: а) 45°; б) 60°; в) 120°; г) 75°; д) 38°; е) 52°; ж) 18°.

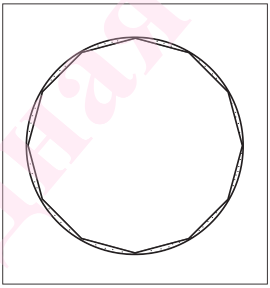
379. Вычислите длину дуги окружности радиуса 6 см, если радианная мера центрального угла, соответствующего этой дуге, равна 3,4 рад.

§ 3. Площадь круга. Площадь сектора

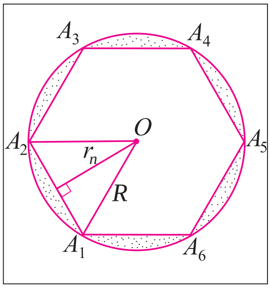
1. Площадь круга. Рассмотрим вопрос о вычислении площади круга. Пусть в окружность, ограничивающую круг, вписан правильный n-угольник. Если число n сторон правильного n-угольника, вписанного в окружность, неограниченно возрастает, то многоугольник все меньше и меньше отличается от круга (рис. 100, *а, б*). Из результатов, доказываемых в вузовском курсе математического анализа, следует, что существует число, к которому стремятся площади S_n правильных n-угольников, вписанных в окружность, при неограниченном возрастании числа их сторон. Это число называется площадью круга. Таким образом, *за площадь круга принимается число, к которому стремятся площади вписанных в окружность, ограничивающую этот круг, правильных n-угольников при неограниченном увеличении числа их сторон.*



а)



б)



в)

Рис. 100

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема (*о площади круга*). ***Площадь S круга радиуса R можно вычислить по формуле $S = \pi R^2$.***

1) Пусть дан круг радиуса R и правильный n-угольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$, вписанный в окружность, которая ограничивает этот круг. На рисунке 100, *в* дано изображение для случая $n = 6$. Если P_n — периметр вписанного многоугольника, а r_n — радиус вписанной в него окружности, то S_n — площадь этого многоугольника, которая находится по формуле $S_n = nS_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} P_n \cdot r_n$.

2) При неограниченном увеличении числа n сторон n-угольника радиус r_n вписанной окружности стремится к R. Действительно, так как $r_n = R\cos\frac{180°}{n}$, то при неограниченном увеличении числа сторон n число $\frac{180°}{n}$ стремится к нулю, а значит, $\cos\frac{180°}{n}$ стремится к единице, т. е. r_n стремится к R. Кроме того, периметр P_n стремится к длине окружности, равной $2\pi R$, а площадь S_n стремится к площади S круга. Таким образом, площадь круга $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

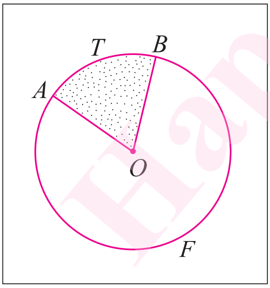
Теорема доказана.

2. Площадь сектора. Рассмотрим вопрос о вычислении площади части круга, которая называется сектором.

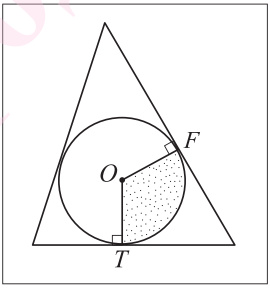
Определение. Сектором называется часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

Дуга окружности, ограничивающая сектор, называется *дугой сектора*.

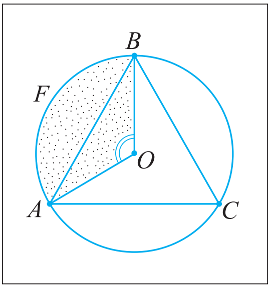
Например, на рисунке 101, *а* изображены два сектора, дугами которых служат дуги ATB и AFB. На рисунке 101, *б* изображены круг, который касается всех сторон треугольника, и два сектора, ограниченные радиусами, проведенными в точки касания, и соответствующими дугами окружности.



а)



б)



в)

Рис. 101

Выведем формулу для вычисления площади S сектора радиуса R, градусная мера дуги которого равна α. Площадь круга радиуса R равна πR^2. Следовательно, площадь сектора, ограниченного дугой, градусная мера которой 1°, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Значит, *площадь сектора, ограниченного дугой, градусная мера которой равна* α *градусов, можно найти по формуле* $S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$.

Например, если ABC — равносторонний треугольник, вписанный в круг радиуса R, а точка O — его центр, тогда площадь сектора, ограниченного радиусами OA, OB и дугой AFB, равна $\frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot 120^\circ = \frac{\pi R^2}{3}$ (рис. 101, *в*).

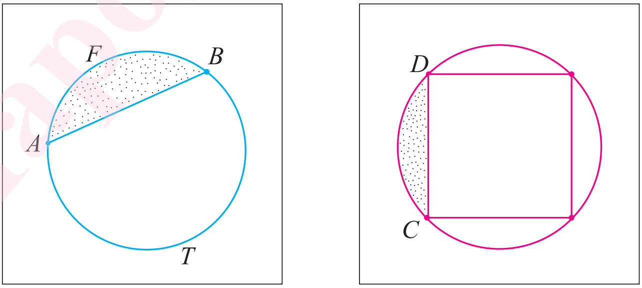
3. Площадь сегмента. Рассмотрим формулу для нахождения площади фигуры, которая называется сегментом.

Определение. Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы дуги.

Дуга окружности, ограничивающая сегмент, называется *дугой сегмента, а ограничивающая его хорда называется основанием сегмента.*

На рисунке 102, *а* изображены два сегмента, ограниченные хордой AB и дугами AFB и ATB. Хорда AB является основанием для каждого из этих сегментов.

На рисунке 102, *б* изображены сегменты, ограниченные стороной CD вписанного квадрата и соответствующими дугами окружности.

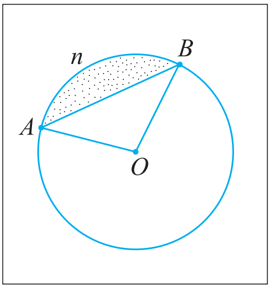


а) *б)*

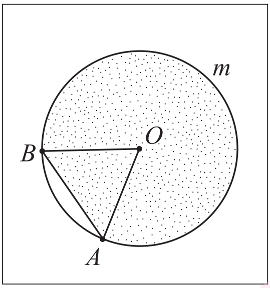
Рис. 102

Выведем формулу для вычисления площади сегмента. Рассмотрим два случая: 1) градусная мера дуги сегмента меньше 180°; 2) градусная мера дуги сегмента больше 180°.

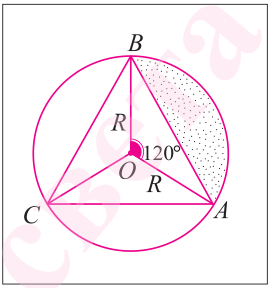
1) Пусть градусная мера дуги AnB сегмента равна α ($\alpha < 180°$) (рис. 103, *а*). Тогда площадь этого сегмента равна разности площади сектора, ограниченного этой дугой и радиусами OA, OB, и площади треугольника AOB, т. е. $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha - S_{AOB}$.



а)



б)



в)

Рис. 103

2) Пусть градусная мера дуги AmB равна α ($\alpha > 180°$) (рис. 103, *б*). Тогда площадь этого сегмента равна сумме площади сектора, ограниченного этой дугой и радиусами OA, OB, и площади треугольника, т. е. $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha + S_{AOB}$.

Заметим, что площадь этого сегмента можно найти так же, как разность между площадью круга и площадью сегмента с тем же основанием и дугой, градусная мера которой равна $360° - \alpha$.

Пусть равносторонний треугольник ABC вписан в круг радиуса R, а точка O — его центр (рис. 103, *в*). Тогда площадь меньшего сегмента, основанием которого служит сторона AB треугольника, равна

$$\frac{\pi R^2}{360°} \cdot 120° - S_{AOB} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2} R^2 \sin 120° = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3} R^2}{4}.$$

Задача 1. Диагональ BD равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне, а площадь круга, вписанного в треугольник ABD, равна 4π см^2. Вычислите длину окружности, описанной около трапеции, если площадь треугольника ABD равна 24 см^2 (рис. 104).

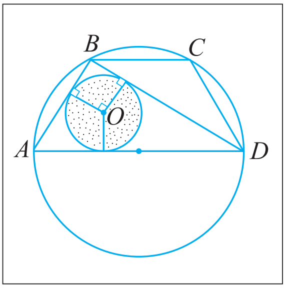


Рис. 104

Решение.

Длину C окружности, описанной около трапеции $ABCD$, можно найти по формуле $C = 2\pi R$. По условию задачи окружность, описанная около трапеции, описана около прямоугольного треугольника ABD. Следовательно, основание AD трапеции является диаметром окружности, т. е. $2R = AD$, а значит, $C = \pi AD$.

1) Пусть r — радиус круга, вписанного в треугольник ABD. Так как площадь этого круга равна 4π см^2, то из уравнения $\pi r^2 = 4\pi$ найдем $r = 2$ см.

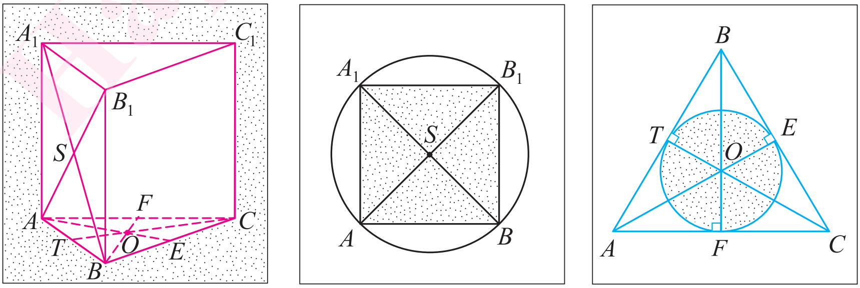
2) Площадь S_{ABD} прямоугольного треугольника ABD найдем по формуле $S_{ABD} = rp$, где r — радиус вписанного круга, p — полупериметр треугольника ABD. По условию задачи $S_{ABD} = 24$ см^2, следовательно, из уравнения $24 = 2p$ получим $p = 12$ см.

3) Для нахождения длины отрезка AD воспользуемся формулой $r = p - AD$. Отсюда $AD = p - r = 12 - 2 = 10$ (см).

4) Теперь длина окружности $C = 2\pi R = \pi AD = 10\pi$ см.

Ответ: 10π см.

Задача 2. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC. Вычислите длину окружности, описанной около боковой грани призмы, если площадь круга, вписанного в основание, равна 9π см^2, а все ребра призмы равны между собой (рис. 105, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 105

Р е ш е н и е.

По условию задачи каждая боковая грань призмы является квадратом. Длину окружности, описанной около квадрата AA_1B_1B, можно вычислить по формуле $C = 2\pi R = \pi AB_1 = \pi\sqrt{2}AB$. *Для нахождения длины стороны AB можем воспользоваться тем, что по условию задачи известна площадь круга, вписанного в равносторонний треугольник ABC* (рис. 105, *б*).

1) Пусть точка O — центр круга, вписанного в равносторонний треугольник ABC, $T = CO \cap AB$, тогда $AB = 2AT$.

2) Так как площадь круга, вписанного в треугольник ABC, равна 9π см^2, то из уравнения $\pi OT^2 = 9\pi$ найдем $OT = 3$ см.

3) В прямоугольном треугольнике ATO $\angle TAO = 30°$, следовательно, $AT = OT \operatorname{ctg} 30° = 3\sqrt{3}$ см, $AB = 6\sqrt{3}$ см (рис. 105, *в*).

4) Теперь вычислим длину C окружности, описанной около грани AA_1B_1B: $C = \pi\sqrt{2}AB = 6\pi\sqrt{6}$ см.

О т в е т: $6\pi\sqrt{6}$ см.

Задачи к § 3

380. Вычислите площадь круга, вписанного в квадрат, если длина стороны квадрата равна 8 см.

381. Площадь круга, вписанного в квадрат, равна 16π см^2. Вычислите площадь квадрата.

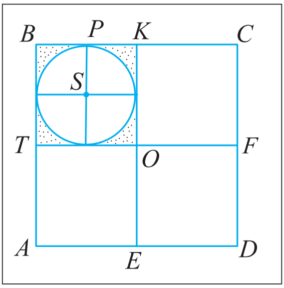
382. Вычислите площадь круга, вписанного в квадрат, длина диагонали которого равна 4 см.

383. В круг вписан квадрат. Найдите отношение площади этого круга к площади круга, вписанного в данный квадрат.

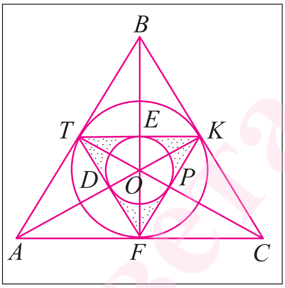
384. Площадь квадрата равна 16 см^2. Вычислите площадь части квадрата, лежащей вне вписанной в него окружности.

385. Точки T, K, F, E — соответственно середины сторон AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$, $O = KE \cap TF$

(рис. 106, *а*). Вычислите площадь круга, вписанного в квадрат $TBKO$, если площадь круга, вписанного в квадрат $ABCD$, равна 4π см^2.



а)



б)

Рис. 106

386. В равностороннем треугольнике ABC точки T, K и F — середины сторон AB, BC и AC соответственно (рис. 106, *б*). Вычислите площадь круга, вписанного в треугольник TKF, если длина окружности, вписанной в треугольник ABC, равна 18π см.

387. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равностороннего треугольника, длина стороны которого равна $6\sqrt{3}$ см.

388. Вычислите площадь равностороннего треугольника, если площадь круга, вписанного в этот треугольник, равна π см^2.

389. Найдите отношение площади круга, вписанного в равносторонний треугольник, к площади круга, описанного около этого треугольника.

390. Площадь равностороннего треугольника равна $\sqrt{3}$ см^2. Вычислите площадь части треугольника, лежащей вне вписанной в него окружности.

391. На высоте равностороннего треугольника, длина стороны которого равна $8\sqrt{3}$ см, как на диаметре построен круг. Вычислите площадь сектора, ограниченного дугой окружности, которая лежит внутри треугольника.

392. Длина окружности, описанной около равностороннего треугольника, равна 16π см. Вычислите длину вписанной в этот треугольник окружности.

393. В равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 6 см, вписан круг. Вычислите площадь сектора, ограниченного меньшей дугой, концами которой служат точки касания круга со сторонами треугольника.

394. Диагональ BD ромба $ABCD$ равна его стороне. Вычислите площадь круга, вписанного в треугольник BCD, если периметр ромба равен 24 см.

395. Градусная мера угла ромба равна $60°$. Вычислите площадь круга, вписанного в этот ромб, если длина его меньшей диагонали равна 6 см.

396. Градусная мера одного из углов ромба равна $120°$. Вычислите площадь ромба, если площадь круга, вписанного в него, равна 3π см^2.

397. Точки T, F, K и P — середины сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$ соответственно. Вычислите площадь круга, описанного около четырехугольника $TFKP$, если $\angle BCD = 60°$ и площадь ромба равна $2\sqrt{3}$ см^2.

398. Площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольного треугольника, равна 100π см^2, а длина одного из катетов треугольника — 8 см. Вычислите площадь этого треугольника.

399. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 6 см, а его площадь — 24 см^2. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого прямоугольного треугольника.

400. Точка O — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, градусная мера угла B которого равна $30°$. Серединный перпендикуляр l к гипотенузе пересекает катет BC в точке F. Вычислите площадь круга, диаметром которого является катет AC, если площадь круга, который ограничен описанной около треугольника BOF окружностью, равна π см^2 (рис. 107, *а*).

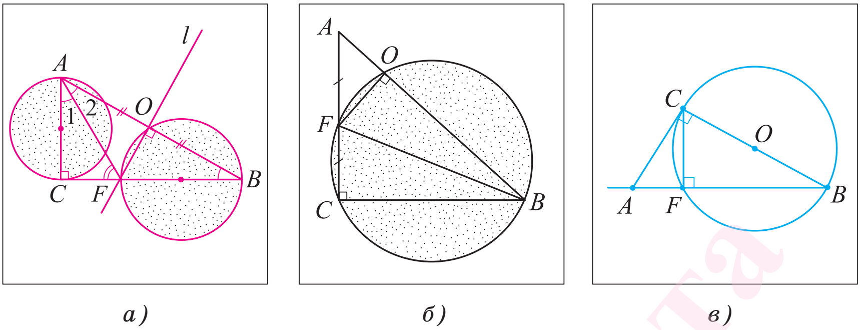


Рис. 107

401. Точка F — середина стороны AC прямоугольного треугольника ABC, отрезок FO — перпендикуляр, проведенный к гипотенузе AB, $AC = 4$ см (рис. 107, *б*). Вычислите площадь треугольника ABC, если площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около четырехугольника $CFOB$, равна 13π см^2.

402. Окружность, диаметром которой является сторона BC прямоугольного треугольника ACB, пересекает гипотенузу AB в точке F. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около треугольника AFC, если $AF = 4$ см, $BF = 9$ см (рис. 107, *в*).

403. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольника, если периметр прямоугольника равен 34 см, а длина одной из его сторон на 7 см больше длины другой стороны.

404. Периметр прямоугольника равен 20 см, а его площадь 24 см^2. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого прямоугольника.

405. Площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольника $ABCD$, равна $\frac{169}{4}\pi$ см^2. Расстояние от вершины B до прямой, содержащей диагональ AC, равно 6 см. Вычислите площадь прямоугольника.

406. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагональ

BD в точке K так, что $DK : KB = 1 : 3$. Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к диагонали BD, равна 6 см. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольника.

407. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренного треугольника, длина основания которого равна 8 см, а градусная мера угла при его основании равна 15°.

408. В равнобедренном треугольнике градусная мера угла при основании равна 30°, а высота, проведенная к основанию, равна 4 см. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого треугольника.

409. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренного треугольника, если длина основания треугольника равна 8 см, а высота, проведенная к этому основанию, — 3 см.

410. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна α, а высота, проведенная к основанию, — m. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого треугольника.

411. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренный треугольник, если длина его боковой стороны равна a, а градусная мера угла при его вершине — α.

412. Вычислите радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, в котором длины гипотенузы и катета равны 13 см и 5 см соответственно.

413. Вычислите площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если градусная мера его угла равна 30°, а длина катета, лежащего против этого угла, равна 2 см.

414. Точка касания вписанного круга делит гипотенузу прямоугольного треугольника на отрезки, длины которых равны 4 см и 6 см. Вычислите площадь круга, вписанного в этот треугольник.

415. Длина окружности, ограничивающей круг, равна 6π см. Градусная мера вписанного в окружность угла равна $20°$. Вычислите площадь сектора, ограниченного дугой, на которую опирается вписанный угол, и радиусами, соединяющими концы этой дуги с центром круга.

416. Площадь круга равна 5π см^2, а градусная мера угла, вписанного в окружность, ограничивающую этот круг, равна $36°$. Вычислите площадь сектора, ограниченного дугой, на которую опирается вписанный угол, и радиусами соединяющими концы этой дуги с центром круга.

417. Длина боковой стороны равнобедренной трапеции равна 8 см, а градусная мера одного из углов — $120°$. Вычислите площадь круга, вписанного в эту трапецию.

418. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, если градусная мера одного из ее углов равна α, а длина средней линии равна m.

419. Градусная мера одного из углов равнобедренной трапеции равна $30°$. Площадь круга, вписанного в эту трапецию, равна 4π см^2. Вычислите длину средней линии трапеции.

420. Площадь равнобедренной трапеции, в которую вписан круг, равна 18 см^2, а длина ее боковой стороны — 6 см. Вычислите площадь круга, вписанного в трапецию.

421. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b.

422. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренной трапеции, длины оснований которой равны 2 см и 14 см, а длина боковой стороны — 10 см.

423. Площадь круга, описанного около грани тетраэдра, равна 4π см^2. Вычислите площадь грани тетраэдра.

424. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Вычислите сумму площадей боковых граней призмы, если площадь круга, описанного около основания призмы, равна 16π см^2, а боковое ребро равно радиусу этого круга.

425. Длина стороны равностороннего треугольника ABC равна a. Точки T, F и E лежат на сторонах AB, BC и AC соответственно так, что $AT : TB = 1 : 2$, $BF : FC = 1 : 2$ и $CE : EA = 1 : 2$. Докажите, что треугольник TFE — равносторонний, и найдите площадь круга, описанного около него.

426. Точки F, T, E и P лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$, $BT = CE = DP = AF = \frac{1}{3}AB$. Докажите, что четырехугольник $FTEP$ — квадрат, и найдите отношение площади круга, вписанного в него, к площади круга, вписанного в квадрат $ABCD$.

427. В прямоугольном треугольнике ABC высота CF, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, длины которых относятся как $4 : 1$. Найдите отношение площади круга, вписанного в треугольник AFC, к площади круга, вписанного в треугольник BFC.

428. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольного треугольника, градусная мера одного из углов которого равна $15°$, а произведение длин катетов равно m.

429. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 3 см и 4 см соответственно. Вычислите площадь круга, который вписан в треугольник ABC.

430. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла, а ее центр лежит на гипотенузе. Вычислите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если длины катетов равны 3 см и 4 см.

431. Градусная мера угла при вершине равнобедренного треугольника равна φ, а высота, проведенная к боковой стороне, равна h. Найдите площадь круга, описанного около треугольника.

432. Градусная мера угла при вершине C равнобедренного треугольника ABC равна $120°$, а длина его боковой стороны равна a. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, проходящей через вершины A, B, и центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

433. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна α. Найдите отношение площади круга, описанного около этого треугольника, к площади вписанного круга.

434. Круг вписан в трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Найдите площадь круга, если известно, что точка касания делит боковую сторону на отрезки, длины которых равны m и n.

435. Около окружности описана прямоугольная трапеция. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если длины оснований трапеции равны a и b.

436. В равнобедренную трапецию, длина меньшего основания которой равна 1 см, вписан круг, площадь которого равна π см^2. Вычислите площадь трапеции.

Вопросы к третьей главе

1. Верно ли, что многоугольник, у которого все стороны равны, является правильным? Приведите пример выпуклого многоугольника, стороны которого равны, но который не является правильным.

2. Верно ли, что два взаимно перпендикулярных диаметра окружности являются диагоналями правильного четырехугольника, вписанного в эту окружность?

3. Всегда ли около правильного многоугольника можно описать окружность?

4. Верно ли, что радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен длине стороны этого шестиугольника?

5. Верно ли, что длину стороны a_n правильного n-угольника можно найти по формуле $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$, где R — радиус описанной окружности?

6. По какой формуле длина стороны правильного n-угольника выражается через радиус вписанной окружности?

7. Площадь квадрата, вписанного в окружность, равна S. Чему равна длина окружности?

8. Площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна S. Найдите площадь круга, ограниченного данной окружностью.

9. Найдите длину окружности, описанной около квадрата, равновеликого кругу радиуса R.

10. Найдите отношение длины окружности, вписанной в правильный шестиугольник, к длине окружности, описанной около него.

4

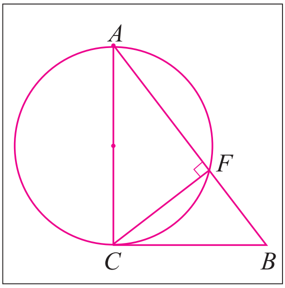
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Глава 4
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

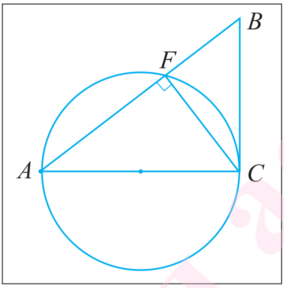
§ 1. Треугольники и окружность

1. Прямоугольный треугольник и окружность.

437. Длина катета BC прямоугольного треугольника ACB равна 15 см, а его катет AC является диаметром окружности, которая пересекает гипотенузу в точке F, $CF = 12$ см. Вычислите радиус окружности.



а)



б)

Рис. 108

Дано: $\triangle ABC$,
$\angle ACB = 90°$,
$BC = 15$ см,
AC — диаметр,
$CF = 12$ см.

Найти: R.

Решение.

Из условия следует, что радиус R равен половине катета AC. Заметим, что $\angle AFC = 90°$, так как опирается на диаметр AC. Таким образом, отрезок CF — высота, проведенная к гипотенузе треугольника ACB, следовательно, $CF^2 = AF \cdot FB$ (рис. 108, *а*, *б*).

1) В треугольнике CFB $FB = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \sqrt{225 - 144} = 9$ (см).

2) Воспользовавшись равенством $CF^2 = AF \cdot FB$, найдем $AF = CF^2 : FB = \frac{144}{9}$ см.

3) Теперь $AB = AF + FB = \frac{144}{9} + 9 = \frac{225}{9}$ (см).

4) Квадрат длины катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и длины проекции этого катета на гипотенузу, следовательно, $AC^2 = AF \cdot AB$ и $AC = \sqrt{AF \cdot AB} = 20$ см.

Таким образом, $R = \frac{AC}{2} = 10$ см.

Ответ: 10 см.

438. Окружность, построенная на стороне AB прямоугольника $ABCD$ как на диаметре, пересекает его диагональ BD в точке F. Вычислите площадь прямоугольника, если точка F делит диагональ на отрезки, длины которых равны 4 см и 9 см.

439. Длина одной из смежных сторон прямоугольника равна 15 см, а длина проекции другой стороны на диагональ прямоугольника равна 16 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в один из треугольников, на которые диагональ разбивает данный прямоугольник.

440. Основание трапеции является диаметром описанной около нее окружности. Вычислите площадь трапеции, если длины оснований трапеции равны 10 см и 26 см.

441. Длина средней линии трапеции равна 9 см, а ее площадь — 54 см^2. Вычислите длины оснований трапеции, если одно из оснований является диаметром описанной около трапеции окружности.

442. В прямоугольной трапеции, высота которой h, на стороне, перпендикулярной основанию, как на диаметре построена окружность, которая касается противоположной стороны трапеции. Найдите произведение длин оснований трапеции.

443. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 15 см. Сторона AD является диаметром окружности, описанной около треугольника ABD, которая пересекает сторону BC в точке T. Вычислите длину хорды BT, если длина ортогональной проекции диагонали BD на сторону AD равна 16 см.

444. Основание D перпендикуляра, проведенного из точки C окружности к ее диаметру AB, делит его на отрезки, длины которых равны 4 см и 9 см. Окружность, построенная на отрезке AD как на диаметре, пересекает хорду AC в точке F. Вычислите длину отрезка AF.

445. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Меньшая окружность пересекает диаметр AB большей окружности в точке T. Касательная к меньшей окружности проходит через точку T и пересекает большую окружность в точке C. Вычислите радиус меньшей окружности, если известно, что она пересекает хорду AC в точке F так, что $CF : FA = 1 : 3$ и расстояние от точки T до прямой AC равно 3 см.

446. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, построенная на отрезке AO как на диаметре, пересекает сторону в точке F, которая делит ее в отношении $1 : 3$. Вычислите градусные меры углов ромба.

447. Окружность, проходящая через вершины тупых и одного из острых углов ромба, пересекает большую диагональ. Точка пересечения делит эту диагональ на части, длины которых равны 5 см и $\frac{7}{5}$ см. Вычислите длину стороны ромба.

448. На основании AB равнобедренного треугольника ACB как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону CB в точке F так, что $CF : FB = 3 : 1$. Вычислите расстояние от точки F до прямой AB, если $AB = 24$ см.

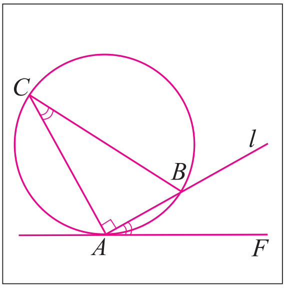
449. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 см и 7 см. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку C, пересекается с другой общей касательной в точке D. Вычислите расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

450. Длины хорд CA и CB окружности соответственно равны 3 см и 4 см, а диаметр CD параллелен хорде AB. Отрезок AF — перпендикуляр, проведенный к диаметру CD. Вычислите длины отрезков CF и FD.

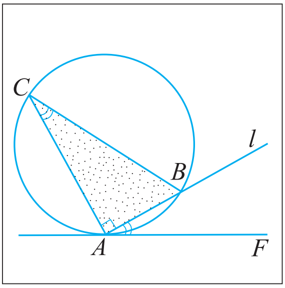
451. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояния от центра окружности до концов большей боковой стороны a и b. Найдите сумму длин оснований трапеции.

452. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, касается боковых сторон AB и CD в точках F и T соответственно. Докажите, что $AF \cdot FB = CT \cdot TD$.

453. Прямая l пересекает окружность в точках A и B, а прямая AF касается окружности в точке A. Вычислите расстояние от точки C, диаметрально противолежащей точке B, до точки касания, если длина хорды AB равна 5 см, а градусная мера угла между прямой l и касательной равна 30°.



а)



б)

Рис. 109

Дано:
AF — касательная, $\angle BAF = 30°$, $AB = 5$ см.
Найти: AC.

Решение. По теореме об угле между хордой и касательной $\angle ACB = \angle BAF = 30°$. Так как точки C и B диаметрально противоположные, то угол CAB опирается на диаметр, а следовательно, он прямой, т. е. треугольник CAB — прямоугольный (рис. 109, *а*, *б*).

Расстояние от точки C до точки касания A равно длине катета CA треугольника CAB. Так как $\angle ACB = 30°$ и $AB = 5$ см, то $CB = 2AB = 10$ см. Тогда $CA = \sqrt{CB^2 - AB^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $5\sqrt{3}$ см.

454. Отрезок BC — диаметр окружности, прямая касается этой окружности в точке A. Известно, что $BA = 2$ см и площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3}$ см^2. Вычислите градусную меру угла между прямой BA и касательной.

455. Касательные l_1 и l_2 к окружности радиуса R проходят соответственно через концы A и B ее диаметра. Третья касательная к окружности пересекает касательные l_1 и l_2 соответственно в точках F и T. Докажите, что $AF \cdot BT = R^2$.

456. Около трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD описана окружность, диаметром которой является основание AD. Найдите площадь трапеции, если длина ее диагонали равна a, а радиус окружности равен R.

457. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 см, а радиус описанной окружности равен 5 см. Вычислите длины катетов треугольника.

458. В прямоугольный треугольник с длинами катетов 36 см и 48 см вписана окружность. Через центр окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислите длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых проведенными прямыми.

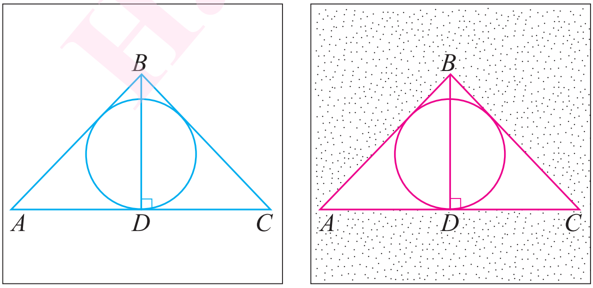
459. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина боковой стороны равна $6\sqrt{6}$ см. Окружность, диаметром которой является сторона AB, пересекает сторону BC в точке F так, что $BF : FC = 2 : 1$. Вычислите длину основания треугольника.

460. В прямоугольный треугольник, длины катетов которого 3 см и 4 см, вписана окружность. К окружности проведена касательная, которая пересекает катеты и разбивает данный треугольник на четырехугольник и треугольник. Вычислите периметр получившегося треугольника.

461. Отрезок CD — перпендикуляр, проведенный к гипотенузе прямоугольного треугольника ABC. Отрезок CD является диаметром окружности, которая на катетах AC и BC отсекает хорды, длины которых a и b. Найдите площадь треугольника ABC.

2. Равнобедренный треугольник и окружность.

462. Вычислите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC, если длина его основания AC равна 24 см, а высота BD, проведенная к основанию, равна 9 см.



а) *б)*

Рис. 110

Дано: $\triangle ABC$,
$AB = BC$,
$BD \perp AC$,
$D \in AC$,
$AC = 24$ см,
$BD = 9$ см.

Найти: r.

Решение.

Для вычисления радиуса r вписанной окружности воспользуемся формулой $S = rp$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр. Отсюда получим $r = \frac{S}{p}$.

1) Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 9 = 108$ (см^2) (рис. 110, *а*, *б*).

2) В прямоугольном треугольнике ADB длина катета $AD = \frac{1}{2} AC = 12$ (см), а длина гипотенузы $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$ (см).

3) Теперь полупериметр $p = \frac{2AB + AC}{2} = \frac{30 + 24}{2} = 27$ (см).

4) Таким образом, найдем $r = \frac{S}{p} = \frac{108}{27} = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

463. В равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 18 см, а длина основания — 12 см, вписана окружность. К ней проведена касательная, параллельная основанию. Вычислите длину отрезка касательной, расположенного внутри треугольника.

464. В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r. Окружность пересекает высоту, проведенную к основанию, в точке, которая делит эту высоту в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Найдите площадь треугольника.

465. Длины боковой стороны и основания равнобедренного треугольника равны соответственно 5 см и 6 см. Вычислите расстояние между точкой пересечения высот треугольника и центром вписанной окружности.

466. В окружность вписан равнобедренный треугольник, в котором длины основания и боковой стороны равны соответственно 10 см и 12 см. Через середину высоты, проведенной к основанию треугольника, проведена хорда, параллельная основанию. Вычислите длину хорды.

467. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписан в окружность. Касательная к окружности проходит через вершину B. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой BC, пересекает касательную в точке E. Найдите длину отрезка BE, если прямая AE делит высоту BD на отрезки, длины которых равны m и n, считая от вершины B.

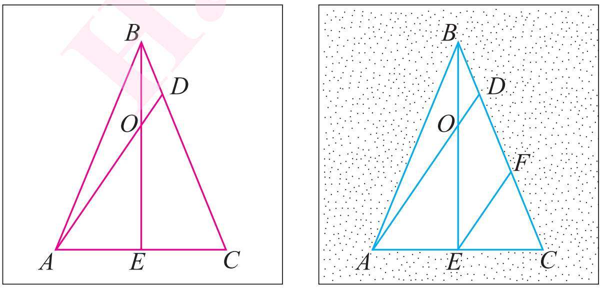
468. Длина основания равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{2}$ см, а длина медианы боковой стороны — 5 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник.

469. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность. Прямая, параллельная стороне AB, касается окружности и пересекает сторону AC в точке M, $MC = \frac{2}{5}AC$. Вычислите радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20 см.

470. В равнобедренном треугольнике ABC высота, проведенная к основанию AC, равна h, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

471. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, основанием которого является отрезок AC, касается боковой стороны BC в точке F. Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = a$ и $BF = m$.

472. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на стороне BC лежит точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении точка O пересечения отрезка AD и высоты BE делит высоту BE, считая от вершины B?



а) б)

Рис. 111

Д а н о: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $D \in BC$, $BD : DC = 1 : 4$, $BE \perp AC$, $E \in AC$, $O = BE \cap AD$.

Н а й т и: $BO : OE$.

Р е ш е н и е.

1) Так как $BD : DC = 1 : 4$, то $DC = 4BD$ (рис. 111, *а*, *б*). Проведем отрезок EF ($F \in BC$), параллельный отрезку AD.

2) Так как высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является медианой, то точка E — середина стороны AC.

3) По признаку средней линии отрезок EF — средняя линия треугольника ADC, значит, $DF = FC = \frac{1}{2}DC = 2BD$.

4) Так как $OD \parallel EF$, то $BO : OE = BD : DF = BD : (2BD) = 1 : 2$.

О т в е т: $BO : OE = 1 : 2$.

473. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC и высотой AD выполняется условие $AD : BC = \sqrt{3}$. Точка T лежит на стороне AB так, что $AT : TB = 1 : 2$. Вычислите градусную меру угла TCB.

474. Отрезок CP — высота, проведенная к основанию AB равнобедренного треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC и $BF : FC = 1 : 3$. Отрезки CP и AF пересекаются в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок AF, считая от вершины A?

475. Отрезок BK — высота, проведенная к стороне AD равнобедренного треугольника с основанием BD, M — точка пересечения высот AO и BK. Вычислите длину отрезка MD, если $BK = 8$ см и $AK : KD = 1 : 2$.

476. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены высота BF и медиана AM, точка O — середина высоты BF, а точка T лежит на стороне BC так, что отрезки OT и AM параллельны. Найдите отношение $BT : TC$.

477. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BF и AT пересекаются в точке S. Точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности, точка S — середина отрезка OF. Вычислите косинус угла ABC.

478. Градусная мера угла при вершине B равнобедренного треугольника ABC равна α. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины A, C и центр вписанной в данный треугольник окружности, если длина боковой стороны равна a.

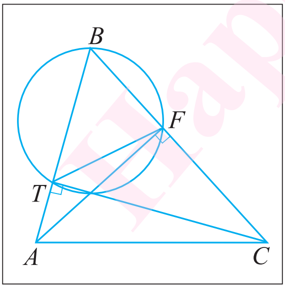
479. В равнобедренный треугольник, длина основания которого равна 6 см, вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три меньших треугольника. Вычислите длину боковой стороны треугольника, если сумма периметров меньших треугольников равна 24 см.

480. Точка F лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC так, что $AF : FC = 1 : 3$. В треугольники ABF и FBC вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BF, если $AC = a$.

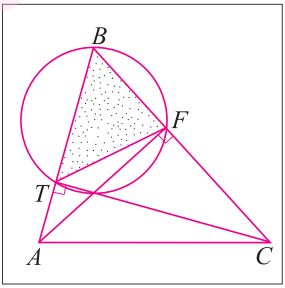
481. Высота BF треугольника ABC является и биссектрисой этого треугольника. Вычислите длину окружности, диаметром которой является отрезок BF, если периметр треугольника ABC равен 40 см, а периметр треугольника ABF равен 25 см.

3. Произвольный треугольник и окружность.

482. Отрезки AF и CT — высоты остроугольного треугольника ABC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BTF, если $\angle ABC = 60°$ и $AC = b$.



а)



б)

Рис. 112

Дано: $\triangle ABC$ — остроугольный, $\angle ABC = 60°$, $AC = b$, $AF \perp BC$, $CT \perp BA$.
Найти: R_{BTF}.

Решение.

Воспользуемся теоремой синусов и тем, что треугольник ABC подобен треугольнику BTF.

1) В треугольнике BTF по теореме синусов выполняется равенство $\frac{TF}{\sin 60^\circ} = 2R_{BTF}$. Следовательно, $R_{BTF} = \frac{TF}{2\sin 60^\circ} = \frac{TF}{\sqrt{3}}$ (рис. 112, *а*, *б*).

2) Рассмотрим треугольники ABC и FTC. Эти треугольники подобны. Действительно, $\frac{BF}{BA} = \cos B$ и $\frac{BT}{BC} = \cos B$. Следовательно, $\frac{BF}{BA} = \frac{BT}{BC} = \cos B$, т. е. треугольники ABC и FTC подобны с коэффициентом подобия $\cos B = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

3) Из подобия треугольников ABC и FTC следует, что $TF = \frac{b}{2}$. Таким образом, $R_{BTF} = \frac{TF}{\sqrt{3}} = \frac{b}{2} : \sqrt{3} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{b\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\frac{b\sqrt{3}}{6}$.

483. Отрезки AP и CT — высоты остроугольного треугольника ABC. Площадь треугольника ABC равна 18 см^2, а длины отрезков TP и AC равны $2\sqrt{2}$ см и $6\sqrt{2}$ см соответственно. Вычислите площадь треугольника BTP.

484. Отрезки AE и CK — высоты остроугольного треугольника ABC. Вычислите диаметр окружности, описанной около четырехугольника $AKEC$, если известно, что периметры треугольников ABC и BEK равны 15 см и 9 см соответственно, а радиус окружности, описанной около треугольника BEK, равен 1,8 см.

485. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и AC в точках F и T соответственно. Найдите площадь треугольника AFT, если площадь треугольника ABC равна S, а градусная мера угла BAC равна 30°.

486. Отрезок AB является диаметром круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BD пересекают границу круга в точках D и F соответственно. Вычислите градусную меру угла CBD, если площадь треугольника ABC в четыре раза больше площади треугольника CDF.

487. Окружность вписана в треугольник, периметр которого равен 20 см. Отрезок касательной, проведенной к окружности, параллелен стороне и расположен между сторонами треугольника. Длина отрезка касательной равна 2,4 см.

Вычислите длину стороны, параллельной отрезку касательной.

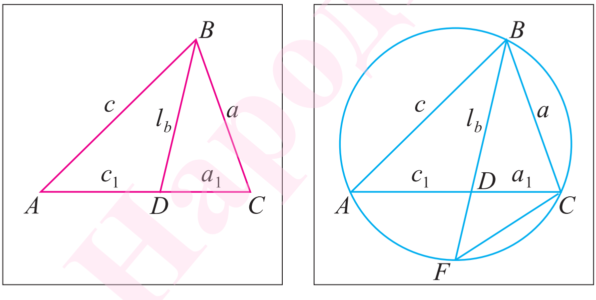
488. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке F. Докажите, что $AF = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC, $BC = a$.

489. В параллелограмме $ABCD$ длины сторон AB и BC равны 4 см и 10 см соответственно. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, касающиеся диагонали BD в точках F и T соответственно. Вычислите длину отрезка FT.

490. Периметр треугольника ABC равен $2p$, сторона $AC = b$, $\angle ABC = \beta$ $(0 < \beta < 90°)$. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK, где точка O — центр вписанной окружности.

491. Биссектрисы BF и AT треугольника ABC пересекаются в точке O. Вычислите длину стороны AC, если $AB = 24$ см, $AO : OT = 3 : 2$ и $AF : FC = 6 : 7$.

492. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $AB = c$, $BC = a$, $BD = l_b$, $AD = c_1$, $DC = a_1$. Докажите, что $l_b^2 = ac - a_1c_1$ (рис. 113, *а*).



а) *б)*

Рис. 113

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABD = \angle DBC$, $AB = c$, $BC = a$, $BD = l_b$, $AD = c_1$, $DC = a_1$.

Доказать: $l_b^2 = ac - a_1c_1$.

Доказательство.

Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Пусть прямая BD пересекает окружность в точке F и $DF = x$ (рис. 113, *б*).

1) По свойству отрезков пересекающихся хорд выполняется равенство $l_b \cdot x = a_1 \cdot c_1$.

2) Треугольники ABD и FBC подобны, так как $\angle ABD = \angle FBC$ по условию и $\angle BAC = \angle BFC$, поскольку являются вписанными в окружность и опираются на одну и ту же дугу.

3) Из подобия треугольников ABD и FBC следует, что $\frac{l_b}{a} = \frac{c}{l_b + x}$. Отсюда $l_b^2 = ac - l_b x$.

3) Таким образом, $l_b^2 = ac - l_b x = ac - a_1 c_1$.

Что и требовалось доказать.

493. В треугольнике ABC длина биссектрисы BF равна $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. Вычислите длины сторон AB и AC, если $BC = 2$ см и $CF = 1$ см.

494. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает медиану CE в точке O. В каком отношении точка O делит биссектрису AD, считая от точки A, если $BD : DC = 2 : 1$?

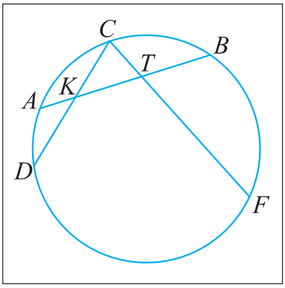
495. Длина биссектрисы AD треугольника ABC равна m. Окружность, построенная на этой биссектрисе как на диаметре, делит соответственно стороны AB и AC в отношении $2 : 1$ и $1 : 1$, считая от вершины A. Найдите площадь треугольника ABC.

496. Окружность, центр которой лежит на стороне AC, касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках F и T соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что точка T — середина стороны BC, отрезок BF в два раза больше отрезка FA, а радиус окружности равен R.

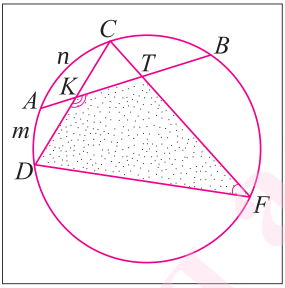
§ 2. Четырехугольники и окружность

1. Произвольный четырехугольник и окружность.

497. Точка C — середина дуги AB окружности меньшей полуокружности. Через точку C проведены хорды CD и CF, которые пересекают хорду AB в точках K и T соответственно. Докажите, что около четырехугольника $DKTF$ можно описать окружность (рис. 114, *а*, *б*).



а)



б)

Рис. 114

Дано:
$\cup AC = \cup CB$,
CD и CF — хорды,
$K = AB \cap CD$,
$T = AB \cap CF$.
Доказать: существование окружности, описанной около $DKTF$.

Решение.

Достаточно доказать, что $\angle DKT + \angle DFT = 180°$.

1) $\angle DKT = \frac{1}{2}(\cup DFB + \cup AnC) = \frac{1}{2}\left(\cup DFB + \frac{1}{2}\cup ACB\right)$.

2) Аналогично $\angle DFT = \frac{1}{2}\cup DAC = \frac{1}{2}\left(\cup DmA + \frac{1}{2}\cup ACB\right)$.

3) Таким образом,

$$\angle DKT + \angle DFT = \frac{1}{2}\left(\cup DFB + \frac{1}{2}\cup ACB\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\cup DmA + \frac{1}{2}\cup ACB\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cup DFB + \cup DmA + \cup ACB\right) = 180°.$$

Что и требовалось доказать.

498. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D. Касательные к окружностям, проведенные через точки C и D, пересекаются в точке O. Докажите, что около четырехугольника $ACOD$ можно описать окружность.

499. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а лучи AB и DC пересекаются в точке T. Вычислите градусные меры углов ABD и BDC, если $\angle AOD = 104°$, $\angle ATD = 28°$.

500. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, а прямые AB и CD пересекаются в точке O. Вычислите градусную меру угла AOD, если градусная мера угла BDC равна $32°$.

501. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке F, а $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Вычислите градусные меры углов BAD и BCD, если $\angle AFD = 80°$, а градусная мера дуги CD равна $60°$.

502. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, а сторона AB — диаметр окружности, прямые AD и CB пересекаются в точке F. Вычислите градусную меру угла AFB, если сторона DC равна радиусу окружности.

503. Около окружности радиуса 6 см описан четырехугольник $ABCD$. Вычислите его площадь, если $AB = 15$ см, $BC = 10$ см, $AD = 20$ см.

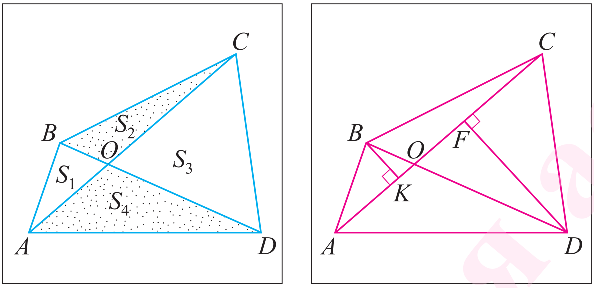
504. В окружность вписан четырехугольник, градусные меры углов которого равны $120°$, $90°$, $60°$ и $90°$. Вычислите радиус окружности, если площадь четырехугольника равна $27\sqrt{3}$ см^2, а его диагонали взаимно перпендикулярны.

505. В окружность радиуса 6 см вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого взаимно перпендикулярны. Точки E и F являются серединами отрезков AC и BD соответственно. Точка K пересечения диагоналей удалена от центра O окружности на расстояние 5 см. Вычислите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырехугольника $OEKF$ равна 12 см^2.

506. В окружность вписан четырехугольник, одна диагональ которого — диаметр окружности. Докажите, что ортогональные проекции противолежащих сторон четырехугольника на другую диагональ равны между собой.

507. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, сторона AB которого является диаметром окружности, а диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Вычислите длину отрезка AO, если $BC = 12$ см, $CO = 9$ см, $S_{ABC} = 3S_{ACD}$.

508. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, пересекающиеся в точке O, разделяют его на треугольники, площади которых $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$, $S_{AOD} = S_4$. Докажите, что верно равенство $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ (рис. 115, *а*).



а) *б)*

Рис. 115

Дано: $ABCD$ — четырехугольник, $AC \cap BD = O$, $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$, $S_{AOD} = S_4$.

Доказать: $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Решение.

1) Пусть $BK \perp AC$, $K \in AC$ и $DF \perp AC$, $F \in AC$ (рис. 115, *б*).

2) Треугольники AOB и BOC имеют общую высоту BK, следовательно, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$ (1).

3) Треугольники COD и AOD имеют общую высоту DF, значит, $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$ (2).

4) Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$ или $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Что и требовалось доказать.

509. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$ и $OD = 4OB$.

510. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

511. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а площади треугольников AOB и COD равны. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

512. В треугольнике ABC через середину стороны AC — точку D — проходит прямая, которая пересекает сторону BC в точке O, а прямую AB — в точке F. Площади треугольников BFO и DOC равны. Докажите, что отрезок BD является средней линией треугольника AFC.

513. Диагонали четырехугольника $ABCD$, в который вписана окружность, пересекаются в точке O. Докажите, что выполняется равенство $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$, где R_1, R_2, R_3, R_4 — радиусы окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD соответственно.

514. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке O. Окружность, описанная около треугольника AOB, пересекает стороны BC и AD в точках F и T соответственно. Верно ли, что $OF = a$, если $OT = a$?

515. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади данного четырехугольника.

2. Трапеция и окружность.

516. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Вычислите площадь трапеции, если длина диагонали AC равна 12 см, а длина отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, равна 9 см.

517. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Чему равно отношение площадей треугольников AOB и BOC, если $BC : AD = m : n$?

518. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне AB. Вычислите длину основания AD, если $\angle ADB = \angle BDC = 30°$ и периметр трапеции равен 30 см.

519. Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно m и n. Найдите длину диагонали BD, если известно, что окружность, описанная около треугольника BCD, касается стороны AB трапеции в точке B.

520. Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен R, а ее диагонали AC и BD делятся точкой их пересечения O в отношении $1 : 3$, считая от меньшего основания BC. Найдите площадь трапеции, если боковая сторона AB видна из точки O под углом, градусная мера которого равна $60°$.

521. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Длина большего основания трапеции равна a, а длина боковой стороны равна m. Найдите площадь трапеции.

522. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом, градусная мера которого равна α.

523. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S. Найдите длину средней линии трапеции, если градусная мера ее острого угла равна φ.

524. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите длину диагонали трапеции, если длины ее оснований равны a и b.

525. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S, а боковая сторона трапеции в два раза больше ее высоты. Найдите площадь круга, вписанного в трапецию.

526. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 32 см^2, а градусная мера одного из углов трапеции равна $30°$. Вычислите длины сторон трапеции.

527. Около окружности описана прямоугольная трапеция, градусная мера острого угла которой равна α. Найдите высоту трапеции, если ее периметр равен P.

528. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна S. Найдите высоту трапеции.

529. Высота равнобедренной трапеции равна 14 см, а длины оснований равны 16 см и 12 см. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около трапеции.

530. Вычислите площадь прямоугольной трапеции, если центр вписанной в нее окружности находится на расстоянии 1 см и 2 см от концов боковой стороны.

531. Длина диагонали равнобедренной трапеции равна 5 см, а площадь равна 12 см^2. Вычислите высоту трапеции.

532. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна $8\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину боковой стороны трапеции, если градусная мера одного из ее углов равна $60°$.

533. Длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равны 8 см и 10 см соответственно, а длина основания BC равна 2 см. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Вычислите площадь трапеции.

534. Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b. Через точку F, принадлежащую стороне AB и делящую ее в отношении $m : n$, считая от точки A, проведена прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая сторону CD в точке T. Докажите, что $FT = \dfrac{an + bm}{m + n}$ (рис. 116, *а*).

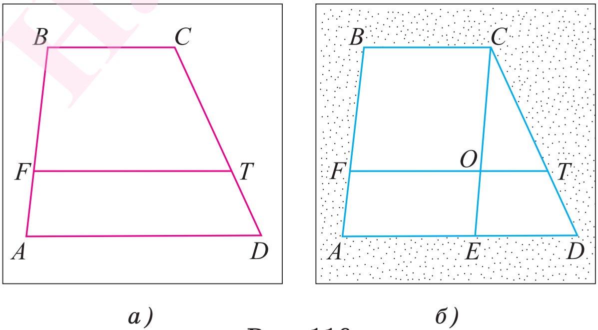


Рис. 116

Дано:
$ABCD$ — трапеция, $AD = a$, $BC = b$, $F \in AB$, $AF : FB = m : n$, $FT \parallel AD$, $T \in CD$.

Доказать:
$FT = \dfrac{an + bm}{m + n}$.

Р е ш е н и е.

1) Проведем отрезок CE, параллельный стороне AB, $E \in AD$. Пусть $O = CE \cap FT$ (рис. 116, *б*).

2) Так как $AF : FB = m : n$ и $FT \parallel AD$, то $AF : FB = DT : TC = m : n$. Из условия $CE \parallel AB$ следует, что $OT = FT - b$.

3) Треугольник CTO подобен треугольнику CDE, следовательно, $\frac{OT}{ED} = \frac{CT}{CD}$ или $\frac{FT - b}{a - b} = \frac{n}{m + n}$. Отсюда получим, что отрезок $FT = \frac{an + bm}{m + n}$. Что и требовалось доказать.

535. Средняя линия трапеции, длина которой равна 10 см, делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно $3 : 5$. Вычислите длины оснований трапеции.

536. Длина средней линии равнобедренной трапеции, в которую вписана окружность, равна 5 см. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых, равно $7 : 13$. Вычислите высоту трапеции.

537. Длины оснований трапеции равны 1 см и 7 см. Вычислите длину отрезка, параллельного основаниям и делящего ее на равновеликие части.

538. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны 6 см и 4 см соответственно. На луче BC лежит точка F так, что прямая AF делит трапецию на две равновеликие фигуры. Вычислите длину отрезка CF.

539. Две окружности радиусов 6 см и 2 см касаются внешним образом. Вычислите расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной.

540. Найдите длину средней линии равнобедренной трапеции, высота которой равна m, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом, градусная мера которого равна $120°$.

541. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Вычислите длину отрезка этой прямой, расположенного между боковыми сторонами трапеции, если длины основания трапеции равны 2 см и 6 см.

ОТВЕТЫ

Глава 1

§ 1

4. 8 см. **6.** $2\sqrt{3}$ см. **7.** 7 см и 18 см. **8.** 60°. **9.** 4 см. **10.** 10 см. **11.** 30 см^2. **14.** 18 см. **15.** 60°. **16.** $R\sqrt{3}$. **17.** $\sqrt{17}$ см. **18.** $\frac{20}{3}$ см и $\frac{20}{3}$ см. **19.** $2a$. **20.** $2\sqrt{13}$ см или $3\sqrt{13}$ см. **21.** $2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. **22.** $\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, $\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$. **23.** 8 см. **24.** $2R$. **25.** $\frac{ab}{2}$. **27.** $\frac{R}{3}$. **29.** $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. **30.** 12 см. **31.** $\sqrt{R_1R_2}$.

§ 2

36. а) 60°; б) 120°. **37.** а) 45°. **38.** 40°. **39.** 15°. **40.** а) 10 см; б) $5\sqrt{3}$ см. **41.** а) $2\sqrt{3}$ см; б) $4\sqrt{3}$ см. **42.** а) 60°. **43.** а) 100°; б) 130°. **44.** 45°. **46.** 92°. **47.** $4R$. **48.** 7,5 см. **49.** 6 см. **50.** 6 см. **51.** 25 см. **52.** $2R(1+\sqrt{3})$. **53.** а) $R\sqrt{3}$. **54.** 39 см^2. **55.** 24 см. **56.** $18\sqrt{3}$ см. **58.** 40 см. **59.** 13 см. **60.** $DO = 8$ см; $OC = 3$ см. **61.** 5 см. **65.** $\frac{90°-\alpha}{2}$. **66.** a. **67.** $\frac{5R}{4}$. **68.** $AT = 1{,}5$ см, $KT = 2$ см. **69.** 20 см. **70.** 30°.

§ 3

72. 4 см. **73.** 3 см. **74.** Нет. **76.** 4 см; 4 см. **77.** 18 см^2. **78.** 5 см. **79.** Да. **80.** 37°. **81.** 22°30′. **82.** 35°. **84.** 9 см. **86.** 24 см. **92.** 8 см. **93.** 4,8 см.

§ 4

94. а) Да; б) 120°; в) 6 см. **95.** 2 см. **96.** 36 см. **97.** 5 : 3. **98.** $\frac{10}{3}$ см. **99.** 12 см. **100.** 10 см. **101.** 30 см. **102.** $\left(3-\sqrt{3}\right)$ см. **103.** $3\sqrt{2}$ см. **104.** 2 см. **105.** 84 см. **106.** б) Да; в) 9 см. **107.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. **108.** 18 см. **109.** 5 см. **110.** 9 см. **111.** 13 см. **112.** 24 см^2. **113.** $\frac{25}{4}$ см. **114.** $\frac{a^2}{2R}$. **115.** 60 см^2. **116.** $\frac{25}{2}$ см. **117.** $7\frac{1}{24}$ см. **118.** 12 см. **124.** 48 см^2. **125.** $12\left(2\sqrt{3}+3\right)$ см^2. **126.** 24 см. **127.** 9 см; 40 см. **128.** 25 см. **129.** 6 см; 8 см; 10 см. **130.** 13 см. **135.** 6 см. **136.** $2\left(3+2\sqrt{3}\right)$ см. **137.** $\frac{2hr}{\sqrt{h^2-2hr}}$. **138.** 13 см. **139.** 768 см^2. **140.** 6 см. **141.** $R(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$. **142.** 15 см.

§ 5

145. 4 см^2. **146.** 2 см. **147.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **148.** 24 см. **149.** $2\left(2-\sqrt{2}\right)$ см. **150.** 1 см. **151.** 20 см. **152.** 3 см. **153.** 4 см. **154.** 40 см. **155.** 5 см. **156.** 6 см. **157.** $\frac{2a(\sin+1)}{\sin\alpha}$. **158.** 80 см^2. **159.** $2a$. **160.** $\frac{m}{4}$. **162.** 2,4 см. **163.** 16 см.

164. 18 см^2. **165.** 32 см^2. **166.** 150 см^2. **167.** 4 см. **168.** 1 см. **169.** $\angle BCD = 110°$; $\angle BDC = 20°$. **171.** а) Да; б) $4(1+\sqrt{3})$ см. **172.** $\sqrt{5}$ см. **173.** 8 см. **174.** $\sqrt{5}$ см. **177.** $4\sqrt{3}$ см. **178.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **179.** 30 см. **180.** $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см. **181.** 7,5 см. **182.** $12\sqrt{3}$ см^2. **185.** ab. **186.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **187.** $2(p+q)\sqrt{pq}$. **189.** $2\sqrt{5}$ см. **190.** 6 см. **191.** $\frac{8r^2\sqrt{3}}{3}$. **192.** $\frac{32a^2\sqrt{3}}{9}$. **193.** $\frac{a}{2}(3-2\sqrt{2})$. **194.** 1 см; 7 см. **195.** 168 см^2. **196.** 7 см; 21 см. **197.** 20 см^2. **198.** Да. **200*.** $2\frac{2}{5}$ см.

Глава 2

§ 1

201. 6 см^2. **202.** 16 см^2. **203.** $\frac{h^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}$. **204.** $2\sqrt{3}$ см^2. **205.** Нет. **206.** $2(1+\sqrt{3})$ см^2. **210.** $2\sqrt{6}$ см. **211.** 4 см. **212.** 60° или 120°. **213.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}$. **214.** $BC \approx 9{,}83$ см; $AC \approx 11{,}95$ см. **215.** $AF \approx 7{,}42$ см. **216.** $3\sqrt{2}$ см. **217.** $\angle A \approx 30°$. **218.** $\approx 6{,}21$ см. **219.** $\approx 11{,}59$ см. **220.** $\frac{b}{2\cos\alpha}$. **222.** $\frac{a\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **223.** $\frac{m\sin\beta}{\sin\frac{3\beta}{2}}$. **224.** $2\sqrt{2}$ см. **225.** $\frac{a^2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **226.** 12 см. **227.** 6 см. **228.** $4\sqrt{2}$ см. **229.** 8 см. **230.** 3 см. **231.** 6,5 см. **232.** 4 см^2. **233.** 4 см^2. **234.** $\frac{m^2\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **235.** $4(\sqrt{3}-1)$ см^2. **236.** 67,5 см^2. **237.** 15 см. **238.** $\frac{m\cos 15°}{2\sqrt{3}}$. **239.** 16 см. **240.** 4 см. **241.** $\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$. **242.** $a^2\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\varphi)$. **243.** $\frac{h}{2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$. **244.** $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **245.** 12,5 см. **246.** $\frac{2R^2\sin^3\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **247.** $\frac{a^2\sin 2\alpha}{8\cos^2\alpha(1+2\cos\alpha)^2}$.

§ 2

248. $\sqrt{97}$ см. **249.** $\sqrt{37}$ см. **250.** 3 см. **251.** $2(8+\sqrt{19})$ см. **252.** 120°. **253.** 7 см; 8 см. **254.** 5 см; $\sqrt{109}$ см. **255.** $2\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ см. **256.** $3(\sqrt{10}-\sqrt{3})$ см^2. **257.** $4\frac{8}{13}$ см. **259.** $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$; $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$. **260.** $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}$; $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}$. **262.** $\sqrt{35}$ см. **263.** $2\sqrt{7}$ см. **264.** $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ см. **265.** $\sqrt{7}$ см. **266.** 60°; $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **267.** 120°. **268.** $\sqrt{7}$ см. **269.** $16\sqrt{3}$ см^2. **270.** 30 см^2. **271.** $\sqrt{19}$ см; $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ см^2.

272. $\sqrt{201}$ см; 19 см. **273.** $BC=\sqrt{2}$ см; $AC\approx 1{,}93$ см; $\angle C=60°$. **274.** $AB=5$ см; $\angle B\approx 8°$; $\angle A\approx 37°$. **275.** $\angle C\approx 82°$; $\angle B\approx 82°$; $AC=14$ см. **276.** $8(2\sqrt{2}+3)$ см. **277.** 8 см. **279.** 39 см. **280.** $10\sqrt{3}$ см^2. **281.** 11 см; 27 см. **282.** 63 см; 36 см. **283.** $\frac{4mn}{\sin\alpha}$; $\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}$; $\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos\alpha}$. **284.** 9,5 см. **285.** 7 см; 9 см. **286.** 60°. **287.** 7 см; 24 см; 25 см. **288.** 9 см; 9 см; $6\sqrt{2}$ см.

Глава 3

§ 1

289. а) 108°; б) 144°; в) 150°. **290.** в) 10. **291.** 8 см^2. **292.** в) $12\sqrt{2}$ см. **295.** г) 6 см. **296.** 36 см^2. **297.** $48\sqrt{3}$ см^2. **302.** 24 см. **303.** $\frac{3R^2}{4}$. **304.** $\frac{R^2}{4}(\sqrt{3}+2)$. **305.** 800 см^2. **306.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **307.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. **308.** 60 см^2. **309.** $\frac{R}{2}$. **313.** $R^2\sqrt{3}$. **314.** $2:\sqrt{3}$. **316.** $\frac{3P}{4}$. **317.** 1,5 см. **318.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **319.** $3(5\sqrt{3}+1)$ см. **320.** $\sqrt{3}$ см. **323.** 4 : 3. **324.** $\frac{a}{6}(3+\sqrt{3})$. **325.** $\frac{4\sqrt{3}\,S}{9}$. **329.** $\frac{S}{5}$. **330.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **331.** $a^2(17-12\sqrt{2})$. **332.** 17 см.

§ 2

333. $3\pi\sqrt{2}$ см. **334.** $32\sqrt{2}$ см. **335.** 3π см. **336.** $\pi\sqrt{S}$. **337.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ см. **338.** 9 см. **339.** $2\pi\sqrt{3}$ см. **340.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ см. **341.** $2\pi\sqrt{S}$. **342.** $\pi\sqrt{5}$ см. **343.** $20(1+\sqrt{3})$ см. **344.** 5π см. **345.** 13π см. **346.** $2\sqrt{73}\pi$ см. **347.** 120 см^2. **348.** 4π см. **349.** $5\sqrt{3}\pi$ см. **350.** $8\sqrt{3}$ см^2. **351.** $a\pi$. **352.** 32π см. **353.** 20π см. **354.** 0,8. **355.** 15 см. **356.** 6π см. **357.** 40π см. **358.** 5π см. **359.** 8π см. **360.** 16π см; 14π см; 6π см. **361.** $\frac{2\pi}{3}$ см; $\frac{2\pi}{3}$ см; $\frac{8\pi}{3}$ см. **362.** 8π см. **363.** 12 см. **364.** 2π см. **365.** 2π см. **366.** 2π см. **367.** 24π см. **368.** $\frac{4\pi}{3}$ см. **369.** $8\sqrt{3}\pi$ см. **370.** 8π см. **371.** 16π см. **372.** $\frac{15}{7}\pi$ см; $\frac{20}{7}\pi$ см. **373.** 12π см. **374.** $3r$. **375.** m. **376.** 12π см.

§ 3

380. 16π см^2. **381.** 64 см^2. **382.** 2π см^2. **383.** 2 : 1. **384.** $4(4-\pi)$ см^2. **385.** π см^2. **386.** $\frac{81}{4}\pi$ см^2. **387.** 36π см^2. **388.** $3\sqrt{3}$ см^2. **389.** 1 : 4. **390.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ см^2. **391.** 12π см^2. **392.** 8π см. **393.** π см^2. **394.** 3π см^2. **395.** $\frac{27\pi}{4}$ см^2. **396.** $8\sqrt{3}$ см^2.

397. π см^2. **398.** $16\sqrt{21}$ см^2. **399.** 25π см^2. **400.** $\frac{3\pi}{4}$ см^2. **401.** $8\sqrt{3}$ см^2. **402.** 13π см^2. **403.** $\frac{169}{4}\pi$ см^2. **404.** 13π см^2. **405.** 78 см^2. **406.** 48π см^2. **407.** 64π см^2. **408.** 64π см^2. **409.** $\frac{625}{36}\pi$ см^2. **410.** $\frac{\pi m^2}{4\sin^4\alpha}$. **411.** $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. **412.** 2 см. **413.** $2\pi(2-\sqrt{3})$ см^2. **414.** 4π см^2. **415.** π см^2. **416.** π см^2. **417.** 12π см^2. **418.** $\frac{\pi m^2\sin^2\alpha}{4}$. **419.** 8 см. **420.** $\frac{9\pi}{4}$ см^2. **421.** $\frac{\pi ab}{4}$. **422.** 50π см^2. **423.** $3\sqrt{3}$ см^2. **424.** $32(\sqrt{2}+1)$ см^2. **425.** $\frac{\pi a^2}{9}$. **426.** $5:9$. **427.** $4:1$. **428.** $\frac{\pi m}{4\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$. **429.** 25π см^2. **430.** $\frac{225\pi}{64}$ см^2. **431.** $\frac{\pi h^2}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\varphi}$ см^2. **432.** $3\pi a^2$. **433.** $\frac{(1+\cos\alpha)^2}{4\sin^4\alpha\cos^2\alpha}$. **434.** πmn. **435.** $\frac{\pi a^2b^2}{(a+b)^2}$. **436.** 5 см^2.

Глава 4

§ 1

438. 78 см^2. **439.** 5 см. **440.** 216 см^2. **441.** 5 см; 13 см. **442.** $\frac{h^2}{4}$. **443.** 7 см. **444.** $\frac{8\sqrt{13}}{13}$ см. **445.** 3 см. **446.** 60°; 120°; 60°; 120°. **447.** 4 см. **448.** $3\sqrt{7}$ см. **449.** $3\sqrt{2}$ см. **450.** $CF=\frac{9}{5}$ см, $FD=\frac{16}{5}$ см. **451.** $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **453.** $5\sqrt{3}$ см. **454.** 30°. **456.** $\frac{a^3}{4R^2}\sqrt{4R^2-a^2}$. **457.** 6 см; 8 см. **458.** 9 см; 16 см; 25 см. **459.** 12 см. **460.** 2 см. **461.** $\frac{(a^2+b^2)^2}{2ab}$. **463.** 6 см. **464.** $3r^2\sqrt{3}$. **465.** $\frac{3}{4}$ см. **466.** 13 см. **467.** $\frac{m\sqrt{n(m+n)}}{n}$. **468.** $\frac{2}{7}\sqrt{14}(3-\sqrt{2})$ см. **470.** $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$. **471.** $\frac{a\sqrt{m^2+am}}{2(a+m)}$. **473.** $\angle TCB=30^\circ$. **474.** $4:3$. **475.** 6 см. **476.** $3:5$. **477.** $\frac{2}{3}$. **478.** $\frac{a\sqrt{2-2\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **480.** $\frac{a}{4}$. **481.** 5π см. **483.** 2 см^2. **484.** $\frac{24}{5}$ см. **485.** $\frac{3}{4}S$. **486.** 30°. **487.** 4 см или 6 см. **489.** 6 см. **490.** $\frac{1}{2}(p-b)^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$. **491.** 18 см. **493.** $AB=3$ см, $AC=2{,}5$ см. **494.** $3:1$. **495.** $\frac{7m^2\sqrt{35}}{48}$. **496.** $\frac{7R^2\sqrt{35}}{20}$.

§ 2

499. $\angle BDC = 38°$, $\angle ABD = 66°$. **500.** $26°$. **501.** $\angle BAD = 110°$; $\angle BCD = 70°$. **503.** 180 см². **504.** $3\sqrt{3}$ см. **505.** $12\sqrt{15}$ см². **507.** $\frac{25}{3}$ см. **509.** $5S_1 + \frac{5}{4}S_2$. **514.** Да. **516.** $36\sqrt{5}$ см². **518.** 12 см. **519.** $\sqrt{mn}$. **520.** $\frac{4\sqrt{3}R^2}{7}$. **521.** $m\sqrt{2am - a^2}$. **522.** $h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. **523.** $\sqrt{\frac{S}{\sin\varphi}}$. **524.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$. **525.** $\frac{S\pi}{8}$. **526.** 8 см; 8 см; $(8 + 4\sqrt{3})$ см; $(8 - 4\sqrt{3})$ см. **527.** $\frac{P\sin\alpha}{2(1 + \sin\alpha)}$. **528.** $\sqrt{S}$. **529.** 100π см². **530.** 3,6 см². **531.** 3 см или 4 см. **532.** 4 см. **533.** 40 см². **534.** $\frac{an + bm}{m + n}$. **535.** 5 см, 15 см. **536.** 4 см. **537.** 5 см. **538.** 1,2 см. **539.** 3 см. **540.** $\frac{m\sqrt{3}}{3}$. **541.** 3 см.

Значения тригонометрических функций

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	–1	$-\sqrt{3}$	—

Значения тригонометрических функций для углов меньше 45° находят, пользуясь верхними наименованиями столбцов; значения тригонометрических функций для углов больше 45° находят, пользуясь нижними наименованиями столбцов.

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
0	0,00000	1,00000	0,00000	—	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55471	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Учебное издание

Шлыков Владимир Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

3-е издание, исправленное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник обложки *Е. В. Шлыков*. Художественный редактор *Е. П. Протасеня*. Технический редактор *Г. А. Дудко*. Корректоры *Д. Р. Лосик, В. С. Бабеня, Е. И. Даниленко, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 07.03.2012. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 10,5 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 7,83 + 0,27 форз. Тираж 79 600 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.

(Название и номер школы)

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Шлыков, В. В.

Ш69 Геометрия : учеб. пособие для 9-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Шлыков. — 3-е изд., испр. — Минск : Нар. асвета, 2012. — 165 с. : ил.

ISBN 978-985-03-1721-6.

Предыдущие издания под названием «Геометрия, 10» вышли в 2006, 2007 гг.

УДК 514(075.3=161.1)

ББК 22.151я721